

Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

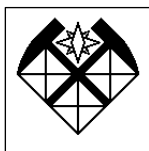
Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

# ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

ВЫСШЕЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ

**Часть IV.**  
**Глава шестая.**  
*Переменное электромагнитное  
поле.*

**Глава седьмая.**  
*Прямая задача теории  
переменного  
электромагнитного  
поля*



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Серго Орджоникидзе  
**(МГРИ)**

---



**Л. М. АЛЬПИН, Д. С. ДАЕВ, А. Д. КАРИНСКИЙ**

# **ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ**

*Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»*

## **Часть IV.**

**Глава шестая. Переменное электромагнитное поле.**

**Глава седьмая. Прямая задача теории переменного электромагнитного поля.**

УДК 550.83.01(0.75)

**Альпин Л. М.,** **Даев Д. С., Каринский А. Д.** Теория полей,  
применяемых в разведочной геофизике.

Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного; электростатического и магнитостатического в вакууме и в поляризующейся (намагничивающейся) среде; стационарных электрического и магнитного; переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости; распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде; способы расчёта полей и их зависимости от среды.

Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Р е ц е н з е н т ы:

1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН)*.

Учебник "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике", отражавший, в то время, взгляды научной школы (бывшего) геофизического факультета МГРИ, был выпущен издательством "Недра" в 1985 году.

По мнению одного из авторов подготовка в настоящее время электронной версии Учебника даёт возможность дополнить книгу несколькими представляющими интерес для студентов (хотя, наверное, в нынешних условиях – в большей степени – не для студентов) разделами и значительно увеличить число иллюстраций. Есть надежда, что удастся подготовить в виде отдельных pdf – файлов следующие пять частей электронной версии Учебника. Часть I: "Введение. Поле"; часть II: "Статические поля в вакууме и в присутствии среды"; часть III: "Стационарные электрическое и магнитное поля"; часть IV: "Переменное электромагнитное поле"; часть V: "Элементы теории упругости и теории распространения упругих колебаний".

В этом разделе электронной версии Учебника представлена  
**часть IV.**

**Глава шестая. Переменное электромагнитное поле.**

**Глава седьмая. Прямая задача теории переменного  
электромагнитного поля.**

2020, 104 с.

Иллюстраций 25, список литературы – 33 названия.

http-адреса **части I:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf)

В части I – разделы: "Предисловие", "Введение", глава первая "Поле".

http-адреса **части II:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=42771398>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf)

В части II – разделы: глава вторая "Статическое поле в вакууме",  
глава третья "Статическое поле в присутствии среды".

http-адреса **части III:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=42782333>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf)

В части III – разделы: глава четвёртая "Стационарное электрическое поле",  
глава пятая "Магнитное поле постоянного тока".

Электронная версия части IV Учебника подготовлена А. Д. Каринским

Москва, 2020 г.

© Каринский А. Д., 2020

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Список обозначений к главам шестой, седьмой.....                 | 5  |
| Глава шестая. Переменное электромагнитное поле .....             | 9  |
| § 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....                                    | 9  |
| I. Ток смещения .....  | 10 |
| II. Первое уравнение Максвелла.....                              | 11 |
| III. Электромагнитная индукция.....                              | 13 |
| IV. Второе уравнение Максвелла .....                             | 15 |
| V. Дополнения к § 1 .....  | 16 |
| § 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.....                      | 17 |
| I. Система в общем виде .....                                    | 17 |
| II. Электромагнитная энергия .....                               | 19 |
| III. Вектор Умова-Пойнтинга.....                                 | 20 |
| § 3. ЭМ ПОЛЕ В НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ .....                          | 22 |
| I. Волновые уравнения.....                                       | 22 |
| II. Распространение электромагнитного поля .....                 | 23 |
| III. Электромагнитная волна .....                                | 25 |
| § 4. ЭМ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.....                             | 25 |
| I. Телеграфные уравнения .....                                   | 25 |
| II. Квазистационарное поле. Уравнения теплопроводности .....     | 27 |
| III. Затухание.....  | 27 |
| IV. Дополнения к § 4.....  | 28 |
| § 5. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ .....                        | 29 |
| I. Потенциалы электромагнитного поля .....                       | 30 |
| II. Уравнения Даламбера .....                                    | 30 |
| III. Запаздывающие потенциалы.....                               | 31 |
| IV. Сторонние возбудители поля.....                              | 32 |
| V. Телеграфные уравнения для электродинамических потенциалов ... | 34 |
| VI. Замечания.....   | 35 |
| § 6. ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕЕСЯ ЭМ ПОЛЕ .....                       | 36 |

|   |    |
|---|----|
|   | 3  |
| I. Скалярное поле.....  | 36 |
| II. Комплексная запись .....  | 37 |
| III. Векторное поле.....  | 40 |
| IV. Система уравнений поля. Уравнения Гельмгольца.....                              | 42 |
| V. Волновое число.....  | 45 |
| VI. Плоская гармоническая волна в однородной среде .....                            | 47 |
| VII. Дополнительные сведения о плоской гармонической волне.....                     | 51 |
| VIII. Применение ряда Фурье .....   | 53 |
| IX. Применение интеграла Фурье.....   | 55 |
| Глава седьмая. Прямая задача теории переменного электромагнитного<br>поля .....     | 58 |
| § 1. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ<br>ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ .....              | 58 |
| I. Краевые и начальные условия .....  | 58 |
| II. Условия сопряжения (граничные условия). Условия у особых точек<br>и линий ..... | 60 |
| III. Теорема единственности .....   | 61 |
| § 2. ПОТЕНЦИАЛЫ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ЭМ ПОЛЯ<br>.....                           | 62 |
| I. Потенциалы электрического типа: $A$ , $U$ , $P$ .....                            | 63 |
| II. Потенциалы магнитного типа: $A^*$ , $U^*$ , $P^*$ .....                         | 64 |
| III. Граничные условия для потенциалов .....  | 65 |
| § 3. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ<br>ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ .....       | 69 |
| I. Постановка задачи и её решение.....  | 69 |
| II. Поле в окрестности диполя .....   | 72 |
| III. Поле в ближней и дальней зонах.....  | 74 |
| § 4. ПЕРЕМЕННЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ<br>ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ .....           | 76 |
| I. Постановка и решение задачи .....  | 77 |



|  |     |
|--|-----|
|  | 4   |
| II. Поле в ближней и дальней зонах .....   | 79  |
| § 5. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМ ВОЛНЫ НА<br>ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ .....                             | 80  |
| I. Постановка и решение задачи .....   | 80  |
| II. Коэффициенты отражения и прохождения.....  | 82  |
| III. О скин-эффекте и импедансе .....  | 83  |
| § 6. ПЕРЕМЕННЫЙ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В<br>ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ .....      | 85  |
| I. Постановка задачи. Дополняющие условия.....   | 85  |
| II. Решение задачи .....   | 86  |
| III. Частные случаи.....   | 91  |
| § 7. ПЕРЕМЕННЫЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ<br>ДИПОЛЬ В ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ..... | 96  |
| I. Постановка задачи. Дополняющие условия.....   | 96  |
| II. Решение задачи .....   | 97  |
| III. Частный случай .....  | 100 |
| Список литературы.....   | 103 |

## Список обозначений к главам шестой, седьмой

$\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_\varphi, \dots$  - безразмерные единичные векторы (орты) по направлениям  $l, X, l_1, l_\varphi, \dots$ ;

$a, 1/\text{м}$  - фазовая постоянная (действительная часть волнового числа  $k$ ), либо точка наблюдения;

$\mathbf{A}$  - векторные электродинамические потенциалы электрического типа;

$\mathbf{A}^*$  - векторные электродинамические потенциалы магнитного типа;

$b, 1/\text{м}$  - коэффициент затухания (коэффициент при мнимой части волнового числа  $k$ );

$\mathbf{B}$ , Тл - вектор магнитной индукции с абсолютной величиной  $B$ ;

$B_l, E_x, j_1, \dots$  - скалярные компоненты векторов  $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{j}, \dots$  по направлениям  $l, X, l_1, \dots$ ;

$\mathbf{B}_l = \mathbf{1}_l \cdot B_l, \mathbf{E}_x = \mathbf{1}_x \cdot E_x, \mathbf{j}_1 = \mathbf{1}_1 \cdot j_1, \dots$  - векторные компоненты векторов  $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{j}, \dots$  по направлениям  $l, X, l_1, \dots$ ;

$c = 299\,792\,458, \text{ м/с}$  - электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме);

$df/d\xi$  - производная функции (величины)  $f(\xi)$  по аргументу  $\xi$ ;

$\partial \mathcal{F} / \partial \xi_1$  - частная производная функции  $\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  аргументов  $\xi_1, \xi_2, \dots$  (поля  $\mathcal{F}$ ) по аргументу  $\xi_1$ ;

$dI_S, \text{ А}$  - поток вектора  $\mathbf{j}$  через (ориентированную) площадку  $dS$ ;

$dl, \text{ м}$  - бесконечно-малый отрезок (элемент) линии  $l$ ;

$d\mathbf{l} = \mathbf{1}_l \cdot dl$  - ориентированный элементарный отрезок длиной  $dl$ ;

$d\mathbf{M}_{\text{вр}}, \text{ Н}\cdot\text{м}$  - (бесконечно малый) момент вращения;

$dS, \text{ м}^2$  - бесконечно-малая площадка, либо элемент поверхности  $S$ ;

$d\mathbf{S} = \mathbf{1}_n \cdot dS = \mathbf{n} \cdot dS$  - ориентированная элементарная площадка с нормалью  $\mathbf{n}$  и с площадью  $dS, \text{ м}^2$ ;

$dV, \text{ м}^3$  - бесконечно малый объём, либо элемент области  $V$  пространства;

$\mathbf{D} = \epsilon_a \cdot \mathbf{E}, \text{ Кл/м}^2$  - вектор электрической индукции (электрического смещения) с абсолютной величиной  $D$ ;

$e \approx 2.71828$  - основание натуральных логарифмов;

$e = e_{\text{плн}}, e_{\text{свб}}, e_{\text{свз}}, e^{\text{стр}}, \text{ Кл}$  - полный, свободный, связанный, сторонний электрические заряды;

$e_{V_{\text{свб}}}$  или  $e_{V_{\text{плн}}}$  Кл - свободный или полный электрические заряды в области пространства  $V$ ;

$\mathbf{E}, \text{ В/м}$  - напряжённость электрического поля с абсолютной величиной  $E$ ;

$\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  и  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ , В/м - кулонова (гальваническая) и индукционная составляющие поля  $\mathbf{E}$ ;

$\mathbf{E}^{\text{стр}}, \text{ В/м}$  - напряжённость стороннего поля с абсолютной величиной  $E^{\text{стр}}$ ;

$\mathcal{E}, \text{ В}$  - напряжение поля  $\mathbf{E}$ ;

- $\mathcal{E}^{\text{стр}}$  (э. д. с.),  $V$  - напряжение поля  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ ;  
 $\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}$ ,  $V$  - контактная э. д. с.;  
 $f$  - функция, либо  $f=2\pi\cdot\omega$ ,  $1/c$ - частота (в Гц);  
 $\mathcal{F}$  - поле;  
 $h$ , м - высота, расстояние;  
 $\mathbf{H}$ , А/м - напряжённость магнитного поля с абсолютной величиной  $H$ ;  
 $i=\sqrt{-1}$  (или  $\exp(i\cdot\pi/2)$ ) - мнимая единица;  
 $\mathbf{i}$ , А/м<sup>2</sup> - вектор поверхностной плотности электрического тока с абсолютной величиной  $i$ ;  
 $I$ , А - электрический ток;  
 $I_A, I_B$ , А - токи эмиссии электродов  $A, B$ ;  
 $I_S$ , А - поток вектора  $\mathbf{j}$  через (ориентированную) поверхность  $S$ ;  
 $I_S^{\text{см}}$ , А - поток вектора  $\mathbf{j}^{\text{см}}$  через (ориентированную) поверхность  $S$ ;  
 $I_{\text{зав}}$ , А - зависимый (от электрического поля и среды) электрический ток;  
 $I_{\text{пр}}$ , А - ток проводимости;  
 $I^{\text{стр}}$ , А - сторонний (произвольно задаваемый, не зависящий от ЭМ поля и среды) электрический ток;  
 $\mathbf{j}$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности электрического тока с абсолютной величиной  $j$ ;  
 $\mathbf{j}_{\text{зав}}=\mathbf{j}_{\text{пр}}+\partial\mathbf{D}/\partial t$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности зависимого (от поля  $\mathbf{E}$  и среды) тока с абсолютной величиной  $j_{\text{зав}}$ ;  
 $\mathbf{j}_{\text{плн}}=\mathbf{j}+\mathbf{j}_{\text{см}}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t=\mathbf{j}_{\text{зав}}+\mathbf{j}^{\text{стр}}$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности полного тока;  
 $\mathbf{j}_{\text{пр}}=\gamma\cdot\mathbf{E}$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности тока проводимости с абсолютной величиной  $j_{\text{пр}}$ ;  
 $\mathbf{j}_{\text{см}}=\partial\mathbf{D}/\partial t$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности тока смещения с абсолютной величиной  $j_{\text{см}}$ ;  
 $\mathbf{j}^{\text{стр}}=\gamma\cdot\mathbf{E}^{\text{стр}}$ , А/м<sup>2</sup> - вектор плотности стороннего тока с абсолютной величиной  $j^{\text{стр}}$ ;  
 $\mathbf{J}$ , А/м - вектор намагничённости с абсолютной величиной  $J$ ;  
 $\mathbf{J}^{\text{вр}}$  и  $\mathbf{J}^0$ , А/м - векторы временной (индуктивной) и постоянной (остаточной) намагничённости;  
 $J_0, J_1$  - функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка;  
 $k=a+i\cdot b$ , 1/м - комплексное (в общем случае) волновое число;  
 $l$  - линия, направление;  
 $l_E, l_j, l_B, l_H, \dots$  - векторные линии полей  $\mathbf{E}, \mathbf{j}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \dots$ ;  
 $l[S]$  - замкнутая линия (контур), ограничивающая поверхность  $S$ ;  
 $\mathbf{L}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{qa}$ , м - радиус-векторы с (равными расстояниям) абсолютными величинами  $L, L_{12}, L_{qa}$ ;  
 $\mathbf{M}$ , А·м<sup>2</sup> - магнитный момент с абсолютной величиной  $M$ ;  
 $n$  - нормаль к поверхности  $S$ , в индексах – обозначение нормальной (к  $S$ ) компоненты вектора;  
 $\mathbf{n}=\mathbf{1}_n$  - безразмерный единичный вектор по направлению нормали  $n$ ;  
 $O$  - начало координат;



- $p$  - точка на поверхности  $S$ ;  
 $\mathbf{p}$ , Кл·м - момент электрического диполя с абсолютной величиной  $p$ ;  
 $q$  - точка, в частности, в источнике (возбудителе) поля;  
 $r$ , м - цилиндрическая координата;  
 $R$  - сферическая координата, м, либо (электрическое) сопротивление, Ом;  
 $S$  - поверхность;  
 $S[V]$  - замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства  $V$ ;  
 $t$  - время, с, либо тангенциальное (касательное к поверхности  $S$ ) направление, в индексах – обозначение тангенциальной (к  $S$ ) компоненты вектора;  
 $T$ , с - период (функции времени  $t$ );  
 $U$  - скалярные электродинамические потенциалы электрического типа;  
 $U^*$  - скалярные электродинамические потенциалы магнитного типа;  
 $\mathbf{v}$ , м/с - скорость распространения электромагнитных волн с абсолютной величиной  $v$ ;  
 $\mathbf{v}_{\text{фаз}}$ , м/с - фазовая скорость с абсолютной величиной  $v_{\text{фаз}}$ ;  
 $\nu_{12}$  - коэффициент отражения;  
 $V$  - область пространства;  
 $w_{12}$  - коэффициент прохождения;  
 $W$ , Дж - (электромагнитная) энергия;  
 $x, y, z$ , м - декартовы координаты (или координата  $z$  цилиндрических координат);  
 $X, Y, Z$  - оси декартовых координат;  
 $Z$ , Ом - импеданс (волновое сопротивление), либо ось  $Z$  цилиндрических или декартовых координат;  
 $\alpha = j_{l0}^{\text{см}} / j_{l0}^{\text{пр}} = \omega \cdot \epsilon_a \cdot \rho$  (альфа) - для гармонически меняющегося ЭМ поля – (безразмерное) отношение амплитуд компонент векторов  $\mathbf{j}_{\text{см}}$  и  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  по любому направлению  $l$ ;  
 $\beta$  (бета) - гармонически меняющаяся скалярная величина;  
 $\gamma$ , Сим/м (гамма) - удельная электропроводность;  
 $\gamma' = \gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a$ , Сим/м - комплексная удельная электропроводность;  
 $\delta$  (дельта) - глубина проникновения электромагнитного поля, м, либо объёмная плотность зарядов, Кл/м<sup>3</sup>;  
 $\delta_D$  - дельта-функция Дирака;  
 $\delta_{\text{плн}} = \delta, \delta_{\text{свб}}, \delta_{\text{свз}}$ , Кл/м<sup>3</sup> - объёмные плотности полных, свободных, связанных зарядов;  
 $\Delta$  (дельта прописная) - угол потерь, рад ( $\text{tg}(\Delta) = \gamma / (\omega \cdot \epsilon_a)$ ), либо обозначение малого приращения  $\Delta g$  некоторой величины  $g$ ;  
 $\epsilon = 1 + \chi$  (эпсилон) - диэлектрическая проницаемость;  
 $\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 \cdot c^2) \approx 10^{-9} / (36 \cdot \pi) \approx 8.8542 \cdot 10^{-12}$ , Ф/м - электрическая постоянная;  
 $\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0$ , Ф/м - абсолютная диэлектрическая проницаемость;  
 $\epsilon' = \epsilon \cdot [1 + (i \cdot \gamma / \omega \cdot \epsilon_a)]$  - комплексная диэлектрическая проницаемость;

$\eta$  (эта) - скалярная компонента векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \dots$  ;  
 $\eta_{12}$ , Кл/м - поверхностная плотность дипольных моментов;  
 $\theta$ , рад (тета) - сферическая координата;  
 $\varkappa$  (каппа) - магнитная восприимчивость;  
 $\lambda$ , м (лямбда) - длина волны;  
 $\Lambda$ , 1/м (лямбда прописная) - переменная интегрирования, а  $\Lambda^2$   
 (либо  $-\Lambda^2$ ) - постоянная разделения;  
 $\mu=1+\varkappa$  (мю) - магнитная проницаемость;  
 $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м - магнитная постоянная;  
 $\mu_a=\mu \cdot \mu_0$ , Гн/м - абсолютная магнитная проницаемость;  
 $\pi$  (пи) $\approx 3.1415926535897932384626433832795028841971694\dots$ ;  
 $\rho$ , Ом·м (ро) - удельное электрическое сопротивление;  
 $\sigma$ , Кл/м<sup>2</sup> (сигма) - поверхностная плотность зарядов;  
 $\sigma=\sigma_{\text{плн}}, \sigma_{\text{свб}}, \sigma_{\text{свз}}$ , Кл/м<sup>2</sup> - поверхностные плотности полных, свободных, связанных зарядов;  
 $\tau$  (тау) - время релаксации, с, либо тангенциальное (касательное к поверхности) направление, в индексах - обозначение полной тангенциальной компоненты вектора;  
 $\mathbf{t}=\mathbf{1}_\tau$  - безразмерный единичный вектор по направлению  $\tau$ ;  
 $\varphi$ , рад (фи) - начальная фаза гармонически меняющейся величины, либо цилиндрическая или сферическая координата;  
 $\phi$  (фи) - функция аргумента  $r$ ;  
 $\Phi$ , рад (фи прописная) - фаза гармонически меняющейся величины;  
 $\chi$  (хи) - диэлектрическая восприимчивость;  
 $\psi$  (пси) - поток вектора, либо функция аргумента  $z$ ;  
 $\Psi_S$  - поток вектора через поверхность  $S$ ;  
 $\omega=2\pi \cdot f$ , 1/с (омега) - круговая частота;  
 $\mathbf{P}, \mathbf{P}^*$  - векторы Герца электрического и магнитного типа;  
 $\mathbf{U}$ , В·А/м<sup>2</sup>=Вт/м<sup>2</sup> - вектор "плотности потока" (или вектор "плотности скорости перемещения") электромагнитной энергии (вектор Умова – Пойнтинга или вектор Пойнтинга) с абсолютной величиной  $U$ ;  
 $\overset{\vee}{I}, \overset{\vee}{\mathbf{M}}, \dots; \overset{\vee}{\mathbf{E}}, \overset{\vee}{\mathbf{H}}, \overset{\vee}{U}, \dots; \overset{\vee}{E}_x, \overset{\vee}{H}_\varphi, \dots$  - гармонически меняющиеся величины  $I, \mathbf{M}, \dots$ ; поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, U, \dots$ ; скалярные компоненты  $E_x, H_\varphi, \dots$  полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \dots$  в комплексной форме;  
 $\overset{\vee}{E}_{x0}, \overset{\vee}{H}_{\varphi 0}, \overset{\vee}{U}_{R0}, \dots$  - не зависящие от времени комплексные амплитуды – скалярные компоненты векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}_0(a), \overset{\vee}{\mathbf{H}}_0(a), \overset{\vee}{\mathbf{U}}_0(a), \dots$ , характеризующих зависимость гармонически меняющихся полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{U}, \dots$  от (положения) точки наблюдения  $a$ .

## Глава шестая. Переменное электромагнитное поле

### § 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Электрическое поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  мы рассматривали в предыдущих главах как два отдельных поля. Но, как будет показано ниже, в общем случае между этими полями существует тесная связь. Поэтому принято называть совокупность полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  электромагнитным (ЭМ) полем и считать, что это поле состоит из электрической и магнитной составляющих.

Собрав уравнения (4.31), (5.42), выведенные в главах четвертой и пятой для полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ , получим *систему уравнений постоянного электромагнитного (ЭМ) поля*.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \text{III. } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, & \text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{D} = \delta_{\text{свб}}. \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

Кроме того, напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}$  согласно (4.21)<sub>II</sub> удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \delta / \varepsilon_0 = \delta_{\text{плн}} / \varepsilon_0, \quad (6.1')$$

а в случае постоянного поля согласно (4.17)<sub>I</sub> уравнение непрерывности электрического тока в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (6.1'')$$

Последнее выражение для вектора плотности тока можно получить формально, взяв производную  $\operatorname{div}$  от обеих частей уравнения (6.1)<sub>I</sub> и приняв во внимание, что вторая производная  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\nabla [\nabla \mathbf{H}]) = 0$ .

В уравнениях (6.1), (6.1'), (6.1'') все величины являются функциями точки  $a$  (её положения в пространстве), но не зависят, от времени  $t$ .

Систему (6.1) дополняют уравнения связи (3.19''), (4.32):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \cdot [\mu \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}^0], \quad \mathbf{j} = \gamma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{свб}}) = (1/\rho) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{свб}}). \quad (6.1''')$$

Согласно (5.43)<sub>1,3</sub>, (3.26)<sub>1</sub>, (5.43)<sub>2</sub>, (3.27)<sub>1</sub>, (4.47)<sub>3</sub>, (4.17)<sub>3</sub> интегральные формы уравнений (6.1) – (6.1'') постоянного ЭМ поля:

$$\left. \begin{array}{lll} \oint_{l[S]} (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) = I_S = \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}), & \oint_l (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = 0, & \oint_S (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = 0, \\ \oint_{S[V]} (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}) = e_{V_{\text{свб}}}, & \oint_{S[V]} (\mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = \frac{e_{V_{\text{плн}}}}{\varepsilon_0}, & \oint_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}) = 0. \end{array} \right\} \quad (6.1''')$$

Уравнения (6.1)<sub>II,IV</sub>, (6.1'), (6.1'') и (6.1''')<sub>1,3</sub> не содержат магнитных величин. Поэтому они позволяют определить электрическое поле  $\mathbf{E}$  независимо от магнитного поля, а рассчитав поле  $\mathbf{E}$ , можно перейти к полю  $\mathbf{j} = \gamma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{свб}})$ . Подставив полученную функцию  $\mathbf{j}$  в уравнение (6.1)<sub>I</sub>, имеем для определения магнитного поля систему уравнений (6.1)<sub>I,III</sub>, в которой неизвестными являются только магнитные поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

Будем впредь, как правило, считать, что величины, характеризующие электромагнитное поле и его возбудители, зависят не только от положения точки  $a$ , но также от времени  $t$ , т. е. полагать, что  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(a, t)$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(a, t)$ ,

$\mathbf{H}=\mathbf{H}(a, t)$ ,  $\mathbf{D}=\mathbf{D}(a, t)$ ,  $\mathbf{j}=\mathbf{j}(a, t)$ ,  $\delta=\delta(a, t)$ ,  $\mathbf{E}^{\text{стп}}=\mathbf{E}^{\text{стп}}(a, t)$  и т. д. Но среду будем по-прежнему считать не меняющейся со временем:  $\varepsilon=\varepsilon(a)$ ,  $\mu=\mu(a)$ ,  $\gamma=\gamma(a)$ . Постоянные магниты (и ферромагнетики) исключим из рассмотрения, т. е. будем полагать, что всюду вектор постоянной намагниченности  $\mathbf{J}^0=0$  и вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}=\mu_0 \cdot \mu \cdot \mathbf{H}=\mu_a \cdot \mathbf{H}$ .

Постоянная (а применительно к горным породам – остаточная) намагниченность может оказывать весьма значительное влияние на постоянное магнитное поле. На переменное ЭМ поле может влиять зависящая от магнитного поля временная (индуктивная) намагниченность. Если нас интересует (или оказывает влияние на результаты измерений) только переменная составляющая ЭМ поля, то мы можем полагать, что  $\mathbf{J}^0=0$ .

Каждому *установившемуся* распределению возбудителей поля (токов, зарядов) соответствует электромагнитное поле, определяемое по формулам, справедливым для постоянного ЭМ поля, и удовлетворяющее системе уравнений (6.1). Но каким является это поле *в процессе изменения* его возбудителей (и соответствующему этому изменению ЭМ поля)? Наиболее простым было бы предположение, что изменение возбудителей всюду вызывает такое же и синхронное изменение ЭМ поля. Это означало бы, что для каждого отдельного мгновения (момента времени  $t$ ) для переменного ЭМ поля справедливы все формулы, полученные для постоянного ЭМ, поля, и, в частности, система уравнений (6.1).

Такое электромагнитное поле будем называть *квазипостоянным*. Часто применяемый для такого поля термин «квазистатическое поле» нельзя считать удачным потому, что в статическом поле  $\mathbf{j}=0$  и нет возбуждаемого постоянным током магнитного поля. А термин «квазистационарное поле» всегда применяют для переменного ЭМ поля в другом частном случае (см. раздел II § 4.).

Но опыт показывает, что фактически в общем случае приведенное предположение не соответствует действительности. В переменном электромагнитном поле, как будет показано ниже, есть явления (ток смещения и электромагнитная индукция), не согласующиеся с системой (6.1) и заставляющие заменить в ней уравнения (6.1)<sub>I</sub> и (6.1)<sub>II</sub> уравнениями Максвелла.

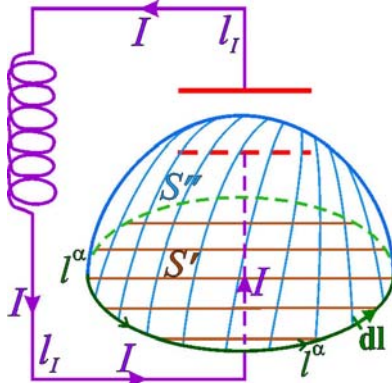
## I. Ток смещения

Как уже было отмечено, из (6.1)<sub>I</sub> следует, что в соответствии с (6.1'')  $\text{div } \mathbf{j}=0$ , но согласно (4.5) в переменном поле  $\text{div } \mathbf{j}=-\frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t}$ . Неравенство нулю

дивергенции непостоянного поля  $\mathbf{j}$  вполне понятно, так как токовые линии  $l_j$  в цепи переменного тока могут обрываться. Такие обрывы получаются, например, на обкладках конденсатора в цепи переменного тока.

На **рис. 6.1** схематически представлен такой почти замкнутый контур  $l_I$  с током  $I$  и показан контур  $l^\alpha$ , который можно считать "сцепленным" (**рис. 4.10**) с токовым контуром (если отвлечься от неполной замкнутости контура  $l_I$ ). На рисунке изображены также опирающиеся на контур  $l^\alpha$  поверхности  $S'$  и  $S''$ , из которых вторая проведена через разрыв цепи, т. е.

между обкладками конденсатора. Через поверхности  $S'$  и  $S''$  "проходят" токи  $I'=I$  и  $I''=0$ . Но  $S'$  и  $S''$  опираются на один и тот же контур  $l^\alpha$  и, следовательно, согласно интегральной форме (6.1''')<sub>I</sub> уравнения (6.1)<sub>I</sub> потоки  $I_{S'}$  и  $I_{S''}$  вектора  $\mathbf{j}$  должны иметь одно и то же значение, равное циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $l^\alpha$ .



**Рис. 6.1.**

Построение, поясняющее явление тока смещения

Устранить указанное противоречие можно допустив, что в разрыве цепи, т. е. в зазоре между обкладками конденсатора, имеем явление, аналогичное электрическому току  $I$  в том смысле, что оно, так же как ток  $I$ , порождает магнитное поле. По аналогии с током  $I$  назовём это явление *током смещения* и обозначим его  $I_{см}$ . В отличие от него будем называть "обычный" ток  $I$  *током проводимости*.

В диэлектрике ( $\epsilon > 1$ ), заполняющем зазор между обкладками конденсатора, при изменении со временем  $t$  поля  $\mathbf{D} = \epsilon_a \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E}$  происходит взаимное *смещение* положительных и отрицательных связанных микрочаргов; получается направленное движение зарядов – обусловленный смещением этих зарядов (см. рис. 3.2, б, в) электрический ток. Но явление, названное (в 19-ом веке) "ток смещения", существует и в вакууме (в отсутствии диэлектрика и связанных микрочаргов) в разрыве цепи тока  $I$ . Судя по некоторым публикациям по этой тематике, применение термина "ток смещения в вакууме" было обусловлено гипотезой об "эфире", заполняющем всё пространство. Но гипотеза эта не нашла подтверждения. В вакууме ( $\chi = 0$ ,  $\epsilon = 1 + \chi = 1$ ) при  $\mathbf{E} \neq 0$  поле  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} \neq 0$ . Иными словами, по отношению к явлению, получившему (в своё время) название "ток смещения", вакуум – не исключение, а частный случай.

## II. Первое уравнение Максвелла

Попытаемся "исправить" уравнение (6.1)<sub>I</sub>, прибавив к его правой части некоторый вектор  $\mathbf{j}_{см}$ :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что  $\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}_{см}$ , а так как вторая производная  $\text{div rot } \mathbf{H} \equiv 0$  получаем  $\text{div } \mathbf{j}_{см} = -\text{div } \mathbf{j}$ . Но согласно (4.5)  $\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \delta_{свб}}{\partial t}$ , поэтому

для согласования уравнения (6.2) с (4.5) надо положить  $\text{div } \mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \delta_{свб}}{\partial t}$ . Из

уравнения (6.1)<sub>IV</sub> следует, что  $\delta_{свб} = \text{div } \mathbf{D}$ , т. е.  $\text{div } \mathbf{j}_{см} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , чему

удовлетворим, приняв  $\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .

Конечно, равенство дивергенций двух векторных полей не всегда означает, что эти поля одинаковы, так как у этих полей могут различаться вихревые (либо однородные) составляющие. Но все экспериментальные данные подтвердили то, что было (теоретически) обосновано Максвеллом: "плотность тока смещения" это – производная по времени  $t$  вектора электрической индукции, то есть  $\mathbf{j}_{см} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ .

Следовательно, указанное выше противоречие устраняется прибавлением к правой части (6.1)<sub>I</sub> слагаемого  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ . Таким образом, вместо (6.1)<sub>I</sub> получаем первое уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.3)$$

согласно которому поле вектора  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , так же как поле вектора  $\mathbf{j}$ , создаёт вихревое магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Вектор  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  был назван плотностью тока смещения. Пользуясь обозначениями

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.4)$$

для плотности тока смещения и плотности полного тока, согласно (6.3) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{полн}}. \quad (6.3')$$

Интегрируя обе части равенства (6.3') по поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $l[S]$ , и применяя теорему Стокса (1.23), получаем интегральную форму первого уравнения Максвелла:

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) = I_S + I_{S_{\text{см}}} = I_{S_{\text{полн}}}, \quad (6.3'')$$

где  $I_S$ ,  $I_{S_{\text{см}}}$ ,  $I_{S_{\text{полн}}}$  – потоки векторов  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{см}}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{полн}}$  через поверхность  $S$ . В частности,

$$I_{S_{\text{см}}} = \int_S (\mathbf{j}_{\text{см}} \, d\mathbf{S}) = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right) = \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}). \quad (6.3''')$$

Равенство (6.3'') выражает закон полного тока для переменного электромагнитного поля. При  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ , что всегда справедливо для постоянного поля, это равенство принимает вид (5.43)<sub>I</sub>.

"Доказывая" (вслед за Максвеллом) существование тока смещения, мы исходили из рассмотрения почти замкнутой цепи, разрыв которой представляет собой малый зазор между обкладками конденсатора (см. рис. 6.1). Иной характер имеет поле вектора  $\mathbf{j}^{\text{см}}$  в цепи с развёрнутой ёмкостью (антенна); в такой цепи ток смещения занимает обширную область (или имеющую практически неограниченные размеры часть) пространства. Но полученные выше формулы фактически справедливы для любой цепи, включая незамкнутую цепь (для тока проводимости). В любом случае при переменном (во времени) потоке вектора  $\mathbf{D}$  через поверхность  $S$  имеем по контуру  $l[S]$  отличную от нуля циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$ .

В общем случае (переменное ЭМ поле в проводящей среде) в одном и том же месте существуют токи обоих видов: проводимости и смещения. В непроводящей среде или в вакууме  $\gamma = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ .

Взяв дивергенцию от обеих частей (6.3'), получим  $0 \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{см}} = \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{полн}}$ , т. е., принимая во внимание (4.5),

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{полн}} = \operatorname{div} (\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{см}} = -\operatorname{div} \mathbf{j} = \partial \delta_{\text{свб}} / \partial t. \quad (6.5)$$

Этим равенствам соответствуют интегральные формы



$$\oint_{S[V]} (\mathbf{j}_{\text{плн}} \mathbf{dS}) = 0, \quad \oint_{S[V]} (\mathbf{j}_{\text{см}} \mathbf{dS}) = - \oint_{S[V]} (\mathbf{j} \mathbf{dS}) = \frac{de_{V \text{ сбб}}}{dt} \quad (6.5')$$

и поверхностные формы

$$\text{Div } \mathbf{j}_{\text{плн}} = \text{Div} (\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0, \quad \text{Div } \mathbf{j}_{\text{см}} = -\text{Div } \mathbf{j} = \partial \sigma_{\text{сбб}} / \partial t. \quad (6.5'')$$

О поверхностной дивергенции  $\text{Div } \mathbf{j}$  см. (1.47) – (1.49) в главе первой и (4.10) – (4.12) в главе четвёртой.

Если на особых поверхностях  $S$  нет поверхностных токов ( $j \neq \infty$ ), и они являются "обычными" границами – поверхностями разрыва электромагнитных параметров среды ( $\gamma$ ,  $\epsilon$  или  $\mu$ ) с нормальными  $n$ , то из равенств (6.5'') получаем:

$$j_n^{(2)} \text{ плн} = j_n^{(1)} \text{ плн}, \quad j_n^{(2)} \text{ см} - j_n^{(1)} \text{ см} = j_n^{(1)} - j_n^{(2)} = \partial \sigma_{\text{сбб}} / \partial t. \quad (6.5''')$$

Соотношения (6.5''') имеем, например, на внутренних (обращённых к зазору) поверхностях обкладок конденсатора, показанного на рис. 6.1. В зазоре конденсатора линии  $l_j$  тока проводимости сменяются линиями  $l_{j\text{см}}$  тока смещения.

Таким образом, согласно (6.5) линии тока проводимости и тока смещения, взятые по отдельности, могут быть разомкнуты, а линии полного тока – всегда замкнуты. Разомкнутый ток проводимости замыкается током смещения.

### III. Электромагнитная индукция

Допустим, что тонкая проводящая нить – "провода" имеет форму замкнутого контура  $l[S]$ . Опыт установлено, что при изменении со временем  $t$  потока  $\psi_S$  вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $l[S]$ , в этом контуре (точнее, в "провода") возникает электрический ток (рис. 6.2, а)

$$I_{\text{эмн}} = - \frac{d\psi_S / dt}{R} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \mathbf{dS}), \quad (6.6)$$

где  $R$  – сопротивление, контура ("провода"). Сравнивая (6.6) с выражением (4.34'), согласно которому  $I = \mathcal{E}^{\text{стп}} / R$ , заключаем, что в контуре  $l$  действует напряжение

$$\mathcal{E}_{\text{эмн}} = - \frac{d\psi_S}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \mathbf{dS}), \quad (6.6')$$

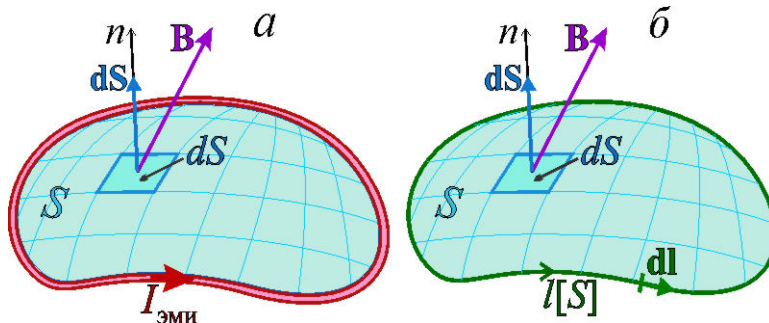


Рис. 6.2.

К закону электромагнитной индукции (а) и второму уравнению Максвелла (6.10) в интегральной форме (б)

аналогичное напряжениям  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^{\text{стп}}$  полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^{\text{стп}}$ . Ток  $I_{\text{эмн}}$  и напряжение  $\mathcal{E}_{\text{эмн}}$  называют индукционными, а их возникновение под действием меняющегося магнитного потока  $\psi_S$  – электромагнитной индукцией. Формула (6.6') выражает



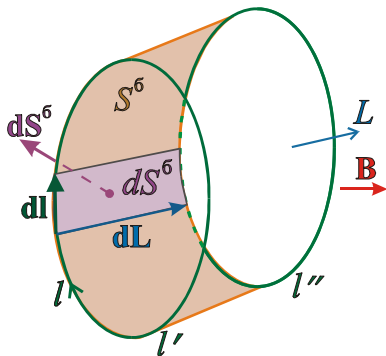
закон Фарадея – Максвелла – Ленца.

Опыт показал, что для справедливости этой формулы *несущественны* обстоятельства, которыми обусловлено изменение  $\psi_S$  со временем. Поток  $\psi_S$  может меняться из-за перемещения контура в поле  $\mathbf{B}$  или вследствие изменения магнитной индукции (поля)  $\mathbf{B}$ , вызванного изменением или перемещением токов (или магнитов), создающих магнитное поле. Для случая, когда контур  $l$  движется в магнитном поле, формула (6.6') следует из выражения (5.9'), определяющего силу, с которой поле  $\mathbf{B}$  действует на движущийся заряд (см. ниже - (6.6''')), а переход к случаю изменения поля  $\mathbf{B}$  со временем получается как обобщение, подтверждаемое опытом.

Меняя в (6.6') порядок дифференцирования и интегрирования, получаем

$$\mathcal{E}_{\text{эми}} = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{dS} \right). \quad (6.6'')$$

Выведем выражение (6.6') для напряжения  $\mathcal{E}_{\text{эми}}$ . Допустим, что тонкое проводящее кольцо со средней линией по контуру  $l$  движется в поле  $\mathbf{B}$  по направлению  $L$  со скоростью  $\mathbf{w} = d\mathbf{L}/dt$  (рис. 6.3). Тогда согласно (5.9') на единицу заряда, несомого кольцом, действует сила, равная векторному произведению  $[\mathbf{w} \mathbf{B}] = [d\mathbf{L} \mathbf{B}]/dt$ , со скалярной компонентой  $[\mathbf{w} \mathbf{B}]_l = (d\mathbf{l} [d\mathbf{L} \mathbf{B}]) / (dt \cdot dl) = (d\mathbf{l} d\mathbf{L} \mathbf{B}) / (dt \cdot dl)$ . При перемещении контура  $l$  на расстояние  $dL$  от положения  $l'$  до положения  $l''$  он описывает ленту  $S^6$ , пронизываемую потоком  $\psi^6$  вектора  $\mathbf{B}$ . При этом элемент  $dl$  контура  $l$  описывает отрезок ленты  $S^6$  – площадку  $dS^6 = [d\mathbf{l} d\mathbf{L}]$  с потоком (через неё)  $d\psi^6 = (dS^6 \mathbf{B}) = ([d\mathbf{l} d\mathbf{L}] \mathbf{B})$ .



**Рис. 6.3.**

Построение, поясняющее явление электромагнитной индукции. Перемещение контура  $l$  по направлению  $L$  в поле  $\mathbf{B}$

Таким образом, компонента  $[\mathbf{w} \mathbf{B}]_l = \frac{1}{dt} \cdot \frac{d\psi^6}{dl}$ , где  $d\psi^6/dl$  – поток через единицу длины ленты  $S^6$ . Интегрируя по всей её длине, получаем равенство

$$\oint_l [\mathbf{w} \mathbf{B}]_l dl = \psi^6 / dt,$$

в котором левая часть – циркуляция вектора  $[\mathbf{w} \mathbf{B}]$ , заставляющего заряды двигаться по контуру  $l$ . Эту циркуляцию, аналогичную напряжению  $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ , обозначим  $\mathcal{E}_{\text{эми}}$  и выясним смысл полученного для неё выражения.

Пусть  $S'$  и  $S''$  – поверхности, опирающиеся на контуры  $l'$  и  $l''$ , а  $\psi'$  и  $\psi''$  – потоки, пронизывающие эти поверхности. Совокупность поверхностей  $S'$ ,  $S''$ ,  $S^6$  образует замкнутую поверхность, ограничивающую область  $V$ , поэтому  $-\psi' + \psi'' + \psi^6 = 0$ . (Нормаль на  $S'$  направлена внутрь области  $V$  (по  $L$ ), поэтому поток  $\psi'$  взят со знаком минус). Следовательно,

$$\psi^6 = \psi' - \psi'' = -d\psi, \quad \frac{\psi^6}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Таким образом, в соответствии с (6.6') имеем

$$\mathcal{E}_{\text{эми}} = \oint_l ([\mathbf{w} \mathbf{B}] \, d\mathbf{l}) = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (6.6''')$$

Полагая, что для возникновения напряжения  $\mathcal{E}_{\text{эми}}$  в кольце важно только отличие от нуля производной  $d\psi/dt$ , но не причина изменения  $\psi$  во времени, можно заменить движение кольца в поле  $\mathbf{B}$  движением токов (магнитов), создающих поле  $\mathbf{B}$ , относительно кольца или изменением этих токов (магнитных моментов магнитов) со временем. Так мы от (6.6'') переходим к формулам (6.6), (6.6'), имеющим более общий смысл.

#### IV. Второе уравнение Максвелла

Формулы (6.6), (6.6') применимы к любому замкнутому контуру  $l$ , мысленно выделенному из проводящей среды. Следовательно, в такой среде в присутствии магнитного поля, меняющегося со временем, должны возникать индукционные напряжения электрического поля и токи по замкнутым контурам. Такое явление действительно есть (токи Фуко). Можно было предположить, что такие напряжения возникают и в непроводящей среде (и в вакууме), а отсутствие индукционных токов в ней объясняется только её бесконечно большим удельным электрическим сопротивлением. Таким образом, в результате ряда обобщений (мы вслед за Максвеллом) приходим к выводу, что формула (6.6) справедлива для любого воображаемого замкнутого контура в какой бы то ни было среде и в отсутствие среды – в вакууме. По аналогии с (4.34'') можно считать, что

$$\mathcal{E}_{\text{эми}} = \oint_{l[S]} (\mathbf{E}^{\text{эми}} \, d\mathbf{l}). \quad (6.7)$$

где  $\mathbf{E}^{\text{эми}}$  – напряжённость некоторого индукционного электрического поля, заставляющего свободные электрические заряды (если они есть) двигаться по контуру  $l[S]$ . Сопоставляя (6.7) с (6.6''), получаем

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{E}^{\text{эми}} \, d\mathbf{l}) = -\int_s \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right). \quad (6.8)$$

Рассматривая поле  $\mathbf{E}^{\text{эми}}$  как разновидность (одно из слагаемых) электрического поля, будем в дальнейшем считать, что в общем случае электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{Кул}} + \mathbf{E}^{\text{эми}}, \quad (6.9)$$

где  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  – кулоново поле, создаваемое электрическими зарядами, а  $\mathbf{E}^{\text{эми}}$  – индукционное поле (поле электромагнитной индукции), возникающее при изменении во времени магнитного поля.

Слагаемые  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  и  $\mathbf{E}^{\text{эми}}$  в (6.9) имеют, конечно, одинаковую размерность (В/м) и оказывают одинаковое силовое воздействие на электрические заряды.

В соответствии с (3.26)<sub>1</sub> циркуляция вектора  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$ , совпадающего в случае постоянного поля (при  $\mathbf{E}^{\text{эми}}=0$ ) с вектором  $\mathbf{E}$ , равна нулю:

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{E}^{\text{Кул}} \, d\mathbf{l}) = 0. \quad (6.8')$$

Что же касается циркуляции вектора  $\mathbf{E}$ , то согласно (6.8), (6.9), (6.8') имеем (рис. 6.2, б)

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = \oint_{l[S]} (\mathbf{E}^{\text{Кул}} \, d\mathbf{l}) + \oint_{l[S]} (\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}} \, d\mathbf{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right). \quad (6.10)$$

Применив теорему Стокса (1.23), получим равенство

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = \int_S \left( - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right).$$

Оно справедливо для любой поверхности  $S$ , поэтому из него следует, что

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Это – второе уравнение Максвелла, согласно которому вокруг мест, где меняется со временем магнитное поле, возникают замкнутые линии  $l^{\text{ЭМИ}}$  поля  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$  – вихревого (индукционного) слагаемого электрического поля  $\mathbf{E}$ .

## V. Дополнения к § 1

1. В проводящей среде под влиянием вихревого поля  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$  возникают замкнутые токи, которые называют вихревыми в отличие от других токов, также, замкнутых, но возникающих под действием невихревого кулонова поля  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  (при участии поля  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ ).

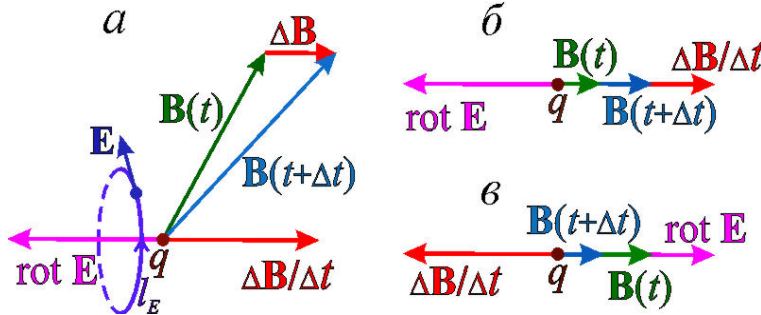
2. Если при изменении какого-либо вектора во времени соблюдается пропорциональность между его компонентами по любым направлениям, то пространственная ориентация этого вектора не меняется. Его конец перемещается по отрезку прямой. При нарушении указанной пропорциональности вектор со временем меняет свою пространственную ориентацию. Каждый из векторов, описывающих электромагнитное поле, в общем случае, в соответствии с (2.15), (4.55), (5.11), (5.12) является суммой элементарных векторов, по-разному направленных и меняющихся во времени. Поэтому векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{j}$ , ... могут со временем менять свою пространственную ориентацию.

Конец каждого из этих векторов описывает некоторую кривую, называемую *годографом*. В общем случае это пространственная кривая (двойкой кривизны), которая может иметь весьма сложный вид. Она может сама себя пересекать и может продолжаться, не замыкаясь. Если поле меняется периодически, годограф – замкнутая кривая; в случае гармонически меняющегося поля, о котором будет идти речь в § 6, проекция годографа на плоскость имеет форму эллипса (*эллиптическая поляризация*). В частных случаях годограф может оказаться окружностью или выродиться в отрезок прямой. В первом из этих случаев имеем постоянное по абсолютной величине *вращающееся поле*, а во втором – *линейно-поляризованное поле* (рис. 6.4 б, в), направление которого в каждой точке  $q$  может меняться лишь на противоположное.

3. У переменного векторного поля может меняться со временем не только его абсолютная величина, но и направление. На рис. 6.4, а показаны (для общего случая) приращения  $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t)$  в точке  $q$ . Предполагаем, что приращение  $\Delta t$  – очень мало, а при  $\Delta t \rightarrow 0$  производная  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  равна

отношению  $\Delta \mathbf{B}/\Delta t$ . Показано также соответствующее (6.11) направление вектора  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  в точке  $q$ . Векторные линии  $l_E$  образуют праввинтовую систему с векторами  $\text{rot } \mathbf{E}$  и  $-\partial \mathbf{B}/\partial t$ .

В общем случае направление вектора  $\partial \mathbf{B}/\partial t$  не совпадает с направлением вектора  $\mathbf{B}$  (рис. 6.4, а). При линейной поляризации поля  $\mathbf{B}$  имеем  $\partial \mathbf{B}/\partial t \parallel \mathbf{B}$



**Рис. 6.4.**

Иллюстрация к уравнению (6.11); общий случай (а) и случай линейной поляризации (б, в)

(рис. 6.4, б) или  $\partial \mathbf{B}/\partial t \uparrow \downarrow \mathbf{B}$  (рис. 6.4, в).

Построения на рис. 6.4 соответствуют уравнению (6.11):  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ . Но при  $\mathbf{j}=0$  уравнение (6.3) принимает вид:  $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D}/\partial t$ . Следовательно, при этом условии сказанное выше остаётся справедливым при заменах  $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)$ ,  $\partial \mathbf{B}/\partial t$ ,

$\text{rot } \mathbf{E}$  соответственно на  $\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}(t+\Delta t) - \mathbf{D}(t)$ ,  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ ,  $-\text{rot } \mathbf{H}$ .

## § 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### I. Система в общем виде

Заменяя в системе (6.1) первые два уравнения уравнениями Максвелла (6.3), (6.11) и принимая во внимание (6.1)', получаем систему уравнений электродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{II. } \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{IV. } \text{div } \mathbf{D} &= \delta_{\text{свб}}, & \text{V. } \text{div } \mathbf{E} &= \delta_{\text{плн}}/\epsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Электродинамика – классическая теория переменного ЭМ поля. Обычно полагают, что система уравнений электродинамики не содержит уравнения (6.12)<sub>V</sub>. Но, как будет видно из дальнейшего изложения, это уравнение необходимо, если нас "интересуют" источники поля  $\mathbf{E}$  (полные электрические заряды). В соответствии с (6.12)<sub>II</sub>, (6.12)<sub>V</sub>  $\text{rot } \mathbf{E}^{\text{ЭМИ}} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ ,  $\text{div } \mathbf{E}^{\text{Кул}} = \delta_{\text{плн}}/\epsilon_0$ .

Из (3.14")<sub>2</sub> следует, что  $\text{div } \mathbf{H} = -\text{div } \mathbf{J}$ , где  $\mathbf{J}$  – вектор намагничённости.

В случае постоянного поля производные по времени  $\partial \mathbf{D}/\partial t = 0$ ,  $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ , поэтому уравнения (6.12)<sub>I, II</sub>, (6.3") и (6.10) принимают вид (6.1)<sub>I, II</sub>, (3.26) и (3.24)<sub>1</sub>.

В системе (6.12) в отличие от (6.1), (6.1)' величины, характеризующие электрическое и магнитное поля, связаны так, что выделить систему, определяющую одно из этих полей, независимо от другого в общем случае не удаётся (см. вступление к § 1). Это отражает тесную связь, существующую между электрической и магнитной составляющими электромагнитного поля.

Интегральными формами уравнений Максвелла (6.12)<sub>I, II</sub> являются (6.3),

(6.10). Уравнения (6.12)<sub>III,IV,V</sub> и их интегральные формы не отличаются от справедливых для постоянного электромагнитного поля уравнений (6.1)<sub>III,IV</sub>, (4.47)<sub>1</sub> и их интегральных форм (3.27)<sub>1,2</sub>, (4.47)<sub>3</sub>. То есть система уравнений электродинамики в интегральной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \oint_{l[S]} (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}) + \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right), \quad \text{II. } \oint_{l[S]} (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = \int_S \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S} \right), \\ \text{III. } \oint_S (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = 0, \quad \text{IV. } \oint_{S[V]} (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}) = e_{V\text{свб}}, \quad \text{V. } \oint_{S[V]} (\mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = e_{V\text{плн}}/\varepsilon_0. \end{array} \right\} (6.12')$$

Без изменения (при переходе от постоянного к переменному полю и при  $\mathbf{J}^0=0$ ) остаются уравнения связи (6.1''')

$$\mathbf{D}=\varepsilon_a \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}=\mu_a \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}=\gamma \cdot (\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{свб}}), \quad (6.13)$$

а также поверхностные формы (5.46), (4.38), (3.29) уравнений поля

$$[\mathbf{n} (\mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)})]=\mathbf{i}, \quad [\mathbf{n} (\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)})]=[\mathbf{n} \, \text{grad}^S \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}] \quad (\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}=\eta_{12}/\varepsilon_0), \quad (6.14)_{1,2}$$

$$(\mathbf{n} [\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)}])=0, \quad (\mathbf{n} [\mathbf{D}^{(2)}-\mathbf{D}^{(1)}])=\sigma_{\text{свб}}, \quad (\mathbf{n} [\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}])=\sigma_{\text{плн}}/\varepsilon_0. \quad (6.14)_{3-5}$$

В (6.13) – (6.14) величины  $\mathbf{E}^{\text{свб}}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}$ ,  $\eta_{12}$  зависят в общем случае не только от точки  $a$ , но также от времени  $t$ .

Если в проводящей среде на особой поверхности  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}$  и касательными к  $S$  направлениями  $\mathbf{t}$  нет поверхностного тока ( $j \neq \infty$ ) и контактной э. д. с.  $\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}$  ( $E_t^{\text{свб}} \neq \infty$ ), "поддерживающей" двойной электрический слой с поверхностной плотностью дипольных моментов  $\eta_{12}$ , то из (6.14) получаем:

$$H_t^{(2)}=H_t^{(1)}, \quad E_t^{(2)}=E_t^{(1)}, \quad B_n^{(2)}=B_n^{(1)}, \quad D_n^{(2)}-D_n^{(1)}=\sigma_{\text{свб}}, \quad E_n^{(2)}-E_n^{(1)}=\sigma_{\text{плн}}/\varepsilon_0. \quad (6.14')$$

Для вектора плотности тока вместо уравнений непрерывности постоянного тока (4.17) имеем уравнения (4.5), (4.10), (4.4):

$$\text{div } \mathbf{j}=-\partial \delta_{\text{свб}}/\partial t, \quad \text{Div } \mathbf{j}=-\partial \sigma_{\text{свб}}/\partial t, \quad \oint_{S[V]} (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}) = -\frac{de_{V\text{свб}}}{dt}, \quad (6.15)$$

где поверхностную дивергенцию  $\text{Div } \mathbf{j}$  определяет выражение (4.11).

В левых частях уравнений (6.12)<sub>I,II,IV,V</sub>, (6.15)<sub>1</sub> – первые пространственные производные различных физических полей, а в правых частях – плотности возбудителей (вихрей или источников) этих полей.

В этой главе и в предыдущих трёх главах показан путь, ведущий от данных опыта до системы уравнений электродинамики. Опираясь на опытную проверку практических выводов из этой системы уравнений, можно её принять в качестве основного закона электродинамических явлений и рассматривать выведенные выше закономерности электрического и магнитного полей как следствия этого закона.

Так, например, для стационарного поля получаем систему (4.98), полагая в (6.12) производные по времени равными нулю и взяв дивергенцию от (6.12)<sub>I</sub>. От уравнений (6.12)<sub>II</sub>, (6.12)<sub>IV</sub> переходим последовательно к системе уравнений электростатики (3.24), уравнению (3.31)<sub>1</sub> (3.37)<sub>3</sub> для потенциала, к решению (3.39')<sub>1</sub> уравнения (3.37)<sub>3</sub>, к выражениям (3.38')<sub>1</sub> и (3.38)<sub>1</sub> для потенциала и напряжённости поля точечного заряда в неограниченном однородном диэлектрике и, наконец, к закону Кулона (3.41).

Более того, в случае переменного поля в самой системе уравнений



электродинамики уравнения (6.12)<sub>III,IV</sub> можно рассматривать как следствия уравнений (6.12)<sub>II,I</sub> ([Стрэттон, 1948], с. 19). Действительно, взяв дивергенции обеих частей уравнения (6.12)<sub>II</sub>, получаем

$$0 = \operatorname{div} (\partial \mathbf{B} / \partial t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B},$$

т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  *нигде никогда* не меняется со временем. В случае *переменного* поля такое возможно только если  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Аналогично получаем из (6.12)<sub>I</sub>, (6.15)<sub>I</sub>

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{j} + \operatorname{div} (\partial \mathbf{D} / \partial t) = -\partial \delta_{\text{свб}} / \partial t + \operatorname{div} (\partial \mathbf{D} / \partial t) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \delta_{\text{свб}}),$$

откуда  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \delta_{\text{свб}}$  в соответствии с (6.12)<sub>IV</sub>.

## II. Электромагнитная энергия

К системе (6.12) присоединяют выражение для электромагнитной энергии  $W$ , содержащейся в области  $V$ .

Согласно (3.60')

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon_a \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) + \mu_a \cdot (\mathbf{H} \mathbf{H}) \} dV = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a \cdot E^2 + \mu_a \cdot H^2) dV, \quad (6.16)$$

причём в общем случае следует считать, что  $W = W(t)$ .

За счёт чего может меняться ЭМ энергия  $W$  в области пространства  $V$ ? Согласно (6.16) для производной ЭМ энергии  $W$  по времени  $t$  (т. е. для скорости изменения энергии) имеем

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left\{ \epsilon_a \cdot \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \mu_a \cdot \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \right\} dV = \int_V \left\{ \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right\} dV \quad (6.17)$$

или в результате подстановки из уравнений Максвелла (6.12)<sub>I,II</sub> выражений  $\partial \mathbf{D} / \partial t = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j} = [\nabla \mathbf{H}] - \mathbf{j}$ ,  $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E} = -[\nabla \mathbf{E}]$  получаем

$$\frac{dW}{dt} = \int_V ([\nabla \mathbf{H}] \mathbf{E}) dV - \int_V (\mathbf{j} \mathbf{E}) dV - \int_V ([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H}) dV.$$

Но согласно (6.13)<sub>3</sub>  $\mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E}^{\text{свп}}$ , следовательно,

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \{ ([\nabla \mathbf{H}] \mathbf{E}) - ([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H}) \} dV + \int_V (\mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{свп}}) dV - \int_V \rho \cdot j^2 dV. \quad (6.18)$$

Из (1.133) имеем

$$([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H}) - ([\nabla \mathbf{H}] \mathbf{E}) = (\nabla [\mathbf{E} \mathbf{H}]) = \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}].$$

Поэтому, применяя теорему Гаусса – Остроградского (1.30), получаем

$$\int_V \{ ([\nabla \mathbf{H}] \mathbf{E}) - ([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H}) \} dV = - \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] dV = - \oint_{S[V]} ([\mathbf{E} \mathbf{H}] \mathbf{dS}),$$

т. е.

$$\frac{dW}{dt} = P - Q - \oint_{S[V]} (\mathbf{y} \mathbf{dS}), \quad (6.19)$$

где в соответствии с (4.45)

$$P = \int_V (\mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{свп}}) dV \quad \text{и} \quad Q = \int_V \rho \cdot j^2 dV. \quad (6.20)$$

Если  $\Delta t$  – достаточно малый промежуток времени, чтобы можно было полагать, что производная  $dW/dt = \Delta W/\Delta t$ , то из (6.19) следует, что изменение энергии  $\Delta W$  в области  $V$  за время  $\Delta t$  определяет выражение

$$\Delta W = P \cdot \Delta t - Q \cdot \Delta t - \oint_{S[V]} (\mathbf{Y} \, d\mathbf{S}) \cdot \Delta t, \quad (6.19')$$

где  $P \cdot \Delta t$  – работа, совершаемая в области  $V$  за время  $\Delta t$  сторонними, силами,  $Q \cdot \Delta t$  – джоулево тепло, выделяющееся в этой области за это же время  $\Delta t$ , а вектор  $\mathbf{Y}$  равен векторному произведению:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{E} \, \mathbf{H}]. \quad (6.21)$$

### III. Вектор Умова-Пойнтинга

Равенства (6.19), (6.19') определяют баланс ЭМ энергии в области  $V$ . Согласно (6.19) изменение электромагнитной энергии, скорость которого определяет производная  $dW/dt$ , происходит за счёт трёх явлений, которым соответствуют три члена правой части равенства (6.19). Смысл слагаемых  $P$  и  $-Q$  ясен (см. выражения (4.45), (4.46) в главе четвёртой). Они соответствуют скорости превращения сторонней энергии в электромагнитную энергию и скорости превращения электромагнитной энергии в тепловую. Скорость изменения электромагнитной энергии в области  $V$ , определяемая разностью  $P - Q$ , зависит от количества электромагнитной энергии, получающейся в этой области за счёт траты в ней сторонней энергии, за вычетом количества электромагнитной энергии, превращающейся в этой же области в тепло. В тех (внешних) областях  $V_e$ , в которых  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$  и  $P = 0$  имеем  $P - Q = -Q \leq 0$ .

Очевидно, что при  $\rho \rightarrow 0$  и ограниченной величине  $j$  в выражении (6.20)<sub>2</sub> для  $Q$  произведение  $\rho \cdot j^2 \rightarrow 0$ . Может показаться, что при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\rho = 1/\gamma \rightarrow \infty$  произведение  $\rho \cdot j^2$  неограниченно возрастает. Но (при  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$ ) произведение  $\rho \cdot j^2 = \rho \cdot \gamma^2 \cdot E^2 = \gamma \cdot E^2 \rightarrow 0$ , если  $\gamma \rightarrow 0$ , а величина  $E$  имеет ограниченные значения. Итак, в правой части (6.19) слагаемое  $Q = 0$  (нет перехода ЭМ энергии в тепловую энергию) в двух случаях:  $\gamma = 0$  (изолятор) и  $\rho = 0$  (идеальный проводник).

Остаётся выяснить смысл третьего слагаемого в правой части (6.19). Для этого рассмотрим случай, когда в области  $V$  удельная электропроводность  $\gamma = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{j} = 0$ . В этом случае  $P = 0$ ,  $Q = 0$  и, следовательно,

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{Y} \, d\mathbf{S}) = - \frac{dW}{dt}. \quad (6.21')$$

Согласно (6.21') имеем в области  $V$  убыль или прирост (со временем  $t$ ) электромагнитной энергии, если поток вектора  $\mathbf{Y}$  через границу  $S[V]$  соответственно положителен или отрицателен. Равенство (6.21') математически идентично равенству (6.15)<sub>3</sub>, в котором вместо изменения со временем количества электромагнитной энергии в области  $V$  идёт речь об изменении количества свободного электричества в этой области, а вместо потока вектора  $\mathbf{Y}$  через поверхность  $S[V]$  берётся поток вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  (плотности "скорости движения свободных микрочарядов", см. (4.1), (4.9) и



рис. 4.1, а, 4.5 в главе четвёртой) через эту поверхность, равный (делённому на  $\Delta t$ ) количеству электричества  $\Delta e_{\text{свб}}$ , проходящему через эту поверхность за (малое) время  $\Delta t$ . Таким образом, следует считать, что электромагнитная энергия перемещается, и третье слагаемое в правой части выражения (6.19) для  $dW/dt$  соответствует скорости прохождения этой энергии через границу  $S[V]$  области  $V$ . Таким образом приходим к *теореме Умова – Пойнтинга*, согласно которой через границу  $S[V]$  области  $V$  за время  $\Delta t$  проходит количество электромагнитной энергии, определяемое потоком вектора  $\mathbf{Y}$  через эту поверхность. Поток  $\oint_{S[V]} (\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}) \cdot \Delta t$  вектора  $\mathbf{Y} \cdot \Delta t$

через поверхность  $S[V]$  представляет собой *поток электромагнитной энергии* через эту поверхность за время  $\Delta t$ . В соответствии с этим можно рассматривать вектор  $\mathbf{Y}$  как вектор плотности скорости потока электромагнитной энергии, (формально) подобный вектору плотности  $\mathbf{j}$  электрического тока. Это означает, что направление вектора  $\mathbf{Y}$  совпадает с направлением движения электромагнитной энергии, а его абсолютная величина равна (делённому на  $(\Delta t \cdot \Delta S)$ ) количеству этой энергии, проходящему за (малый) промежуток времени  $\Delta t$  через (малую) площадку  $\Delta S$ , нормальную к направлению движения электромагнитной энергии. Вектор  $\mathbf{Y}$  называют *вектором Умова – Пойнтинга* или *вектором Пойнтинга*.

Так как согласно (6.21) размерность  $[Y] = \text{В} \cdot \text{А} / \text{м}^2 = \text{Вт} / \text{м}^2$ , то имеющее размерность  $\text{Вт}$  скалярное произведение (поток вектора  $\mathbf{Y}$  через ориентированную площадку  $dS$ )  $(\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S})$  – это фактически "поток мощности" или "скорость потока ЭМ энергии" через площадку  $dS$ . Так что вектор  $\mathbf{Y}$  возможно следовало бы назвать "вектор плотности потока мощности".

В случае постоянного поля производная по времени  $dW/dt = 0$  и поэтому из (6.19) получаем

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}) = P - Q, \quad (6.19'')$$

а если, кроме того, в области  $V$   $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ , т. е. если эта область расположена во внешней части цепи (постоянного) тока, то  $P = 0$  и, следовательно,

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}) = -Q, \quad (6.19''')$$

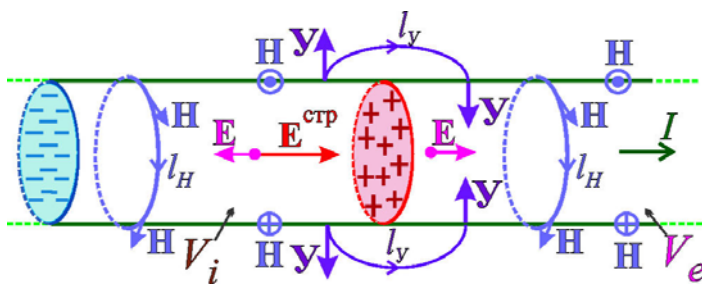


Рис. 6.5.

Направления векторов Умова – Пойнтинга  $\mathbf{Y}$  у боковой поверхности внутреннего ( $V_i$ ) и внешнего ( $V_e$ ) цилиндрического участка цепи постоянного электрического тока

Определим направление вектора  $\mathbf{Y}$  у поверхности участка цепи постоянного тока: у внешней ( $V_e$ ) и внутренней ( $V_i$ ) частей цепи (рис. 6.5). Согласно (5.12) вектор  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_a$  связан с вектором  $\mathbf{j}$  так, что у поверхности токового кольца (см. рис. 4.15,а в главе четвёртой) вектор  $[\mathbf{j} \mathbf{H}]$  всюду направлен внутрь тела кольца. Но (в электрически изотропной

среде) направление вектора  $\mathbf{j}$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{E}$  во внешней части кольца и вектора  $-\mathbf{E}$  (вектора  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ , см. в конце раздела I, § 3 главы четвёртой) во внутренней части кольца.

Поэтому вектор  $\mathbf{Y}$  у поверхности внешней части кольца направлен (как вектор  $[\mathbf{j} \mathbf{H}]$ ) в тело кольца, а у поверхности внутренней части кольца – из тела кольца.

Можно пояснить это и иначе. Так как согласно (6.21)  $\mathbf{Y}=[\mathbf{E} \mathbf{H}]$ , то  $\mathbf{Y} \perp \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{Y} \perp \mathbf{H}$  и векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{Y}$  образуют правую тройку (см. рис. В.1, в, г в разделе "Введение"). Поэтому, как видно на рис. 6.5, в соответствии с (6.21), ЭМ энергия "выходит" из внутренней ( $V_i$ ) и "входит" во внешнюю часть  $V_e$  цепи электрического тока.

Из сказанного следует, что электромагнитная энергия выходит из внутренней части  $V_i$  цепи в окружающее пространство и возвращается из него во внешнюю часть  $V_e$  цепи тока. Здесь мы получаем ответ на вопрос, оставленный открытым в разделе V § 3 главы четвёртой. Разность  $(P-Q) \cdot \Delta t$ , соответствующая области пространства, занимаемой внутренней частью цепи тока, представляет собой долю сторонней энергии, не израсходованную в ней за время  $\Delta t$  на джоулево тепло. Эта доля энергии в виде электромагнитной энергии транспортируется через пространство, окружающее цепь тока, от её внутренней части к внешней части, где (в случае стационарного поля) вся эта энергия выделяется в виде тепла.

### § 3. ЭМ ПОЛЕ В НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Далее в этой и следующей главах будем, как правило, интересоваться только переменной частью поля и поэтому часто, не оговариваясь, определять поле и его возбудители с точностью до постоянных (не зависящих от времени) слагаемых.

В непроводящей среде  $\gamma=0$  и  $\mathbf{j}=0$ , поэтому если в ней не заданы свободные заряды ( $\delta_{\text{свб}}=0$ ), то вместо (6.12)<sub>I,IV</sub> получаем  $\text{rot } \mathbf{H}=\partial \mathbf{D} / \partial t$ ,  $\text{div } \mathbf{D}=0$ . Если, кроме того, в изучаемой области  $V$  среда однородна по диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , т. е.  $\text{grad } \epsilon=0$  и скалярное произведение  $(\mathbf{E} \text{ grad } \epsilon)=0$ , то согласно (3.21')<sub>1</sub> в области  $V$  нет никаких зарядов ( $\delta_{\text{плн}}=0$ ) и  $\text{div } \mathbf{E}=0$ . Если среда в области  $V$  однородна по магнитной проницаемости ( $\text{grad } \mu=\nabla \mu=0$ ), то из (6.12)<sub>III</sub> получаем:  $0=\text{div } \mathbf{B}=\mu_0 \cdot \text{div } (\mu \cdot \mathbf{H})=\mu_0 \cdot \mu \cdot \text{div } \mathbf{H}$  т. е.  $\text{div } \mathbf{H}=0$ .

Кроме того, как уже было сказано, будем полагать, что параметры среды не зависят от времени. Тогда, например, в соответствии с (6.13)<sub>1</sub>  $\partial \mathbf{D} / \partial t=\partial(\epsilon_a \cdot \mathbf{E}) / \partial t=\epsilon_0 \cdot \partial(\epsilon \cdot \mathbf{E}) / \partial t=\epsilon_0 \cdot (\epsilon \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t+\mathbf{E} \cdot \partial \epsilon / \partial t)=\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t=\epsilon_a \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t$ .

#### I. Волновые уравнения

Для области  $V$ , в которой  $\gamma=0$ ,  $\delta_{\text{свб}}=0$ ,  $\nabla \epsilon=0$ ,  $\nabla \mu=0$ , система (6.12) принимает простой симметричный вид

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. rot } \mathbf{H} = \epsilon_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{II. rot } \mathbf{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{III. div } \mathbf{H} = 0, & \text{IV. div } \mathbf{E} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.22)$$

Такая система позволяет получить уравнения отдельно для векторов  $\mathbf{H}$  и

Е. Действительно, взяв производные по времени и роторы от (6.22)<sub>I, II</sub>, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\partial \mathbf{H} / \partial t) &= \varepsilon_a \cdot \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2, & \operatorname{rot}(\partial \mathbf{E} / \partial t) &= -\mu_a \cdot \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_a \cdot \operatorname{rot}(\partial \mathbf{E} / \partial t), & \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \cdot \operatorname{rot}(\partial \mathbf{H} / \partial t). \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (1.80) для вторых производных векторного поля  $\mathbf{M}$  ( $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} - \nabla^2 \mathbf{M}$ ), а также то, что согласно (6.22)<sub>III, IV</sub> в рассматриваемом случае дивергенции векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  равны нулю, получаем для этих векторных полей (однородные) *волновые уравнения*:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (6.23)$$

При указанных выше условиях (в однородном изоляторе) уравнения вида (6.23) справедливы не только для векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , но и для полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{D}$ . Волновые уравнения содержат вторые пространственные производные ( $\nabla^2 \dots$ ) и вторые производные по времени ( $\partial^2 \dots / \partial t^2$ ).

Для выяснения характера решений этих уравнений применим их к полям

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}_x \cdot E_x(z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{1}_y \cdot H_y(z, t), \quad (6.23')$$

т. е. к (линейно поляризованным) полям  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , лежащим в плоскостях  $z = \text{const}$  системы  $x, y, z$  и не зависящим от координат  $x$  и  $y$ .

## II. Распространение электромагнитного поля

Введём обозначение  $\eta(z, t)$  для любой из скалярных компонент  $E_x, H_y$  полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в правых частях равенств (6.23'). Для поля  $\eta(z, t)$  (компонент  $E_x, H_y$ ) уравнения (6.23) принимают вид (см. выражение (в.23) в разделе "Введение")

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (6.24)$$

где

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_a \cdot \mu_a. \quad (6.24')$$

"Одномерное" волновое уравнение вида (6.24) называют "*уравнение струны*". Согласно (6.24), вторая производная  $\partial^2 \eta / \partial z^2$  отличается от второй производной  $\partial^2 \eta / \partial t^2$  постоянным (при заданных проницаемостях среды) множителем  $v^2$ .

Нетрудно убедиться в том, что дифференциальному уравнению (6.24) второго порядка удовлетворяют две функции:  $f_1(t - z/v)$  и  $f_2(t + z/v)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  – произвольные функции аргументов  $t - z/v$  и  $t + z/v$  соответственно, дважды дифференцируемые по  $t$  и  $z$ , а общее решение этого уравнения – сумма этих функций:  $\eta(z, t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v)$ .

Полагая  $f_2 = 0$ , получаем решение

$$\eta(z, t) = f_1(t - z/v). \quad (6.25)$$

Правая часть равенства (6.25) не изменится, если подставить в неё  $z + \Delta z$  и  $t + \Delta t$  вместо  $z$  и  $t$  при условии, что  $\Delta t = \Delta z/v$ . То есть при таком соотношении между приращениями  $\Delta z$  и  $\Delta t$  имеем

$$\eta(z+\Delta z, t+\Delta t)=\eta(z, t). \quad (6.25')$$

Следовательно, если в момент  $t$  величина  $\eta$  имеет в плоскости с координатой  $z$  некоторое значение  $\eta(z, t)$ , то через промежуток времени  $\Delta t=\Delta z/v$  это же значение величина  $\eta$  будет иметь в плоскости  $z+\Delta z$ . Это означает, что в соответствии с (6.24') поле  $\eta$  распространяется по направлению оси  $Z$  со скоростью

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}, \quad (6.26)$$

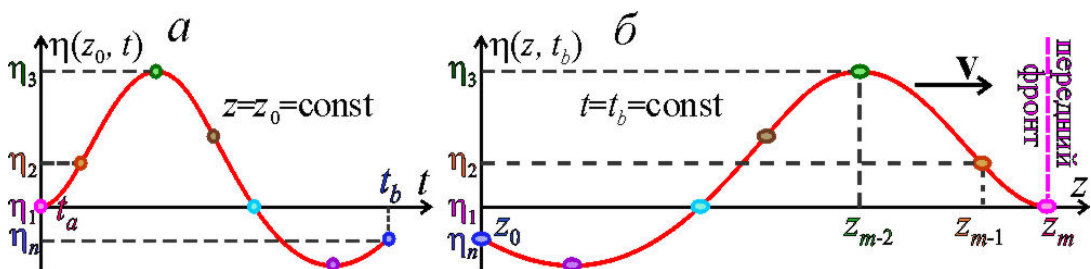
где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad (6.26')$$

– *электродинамическая постоянная*, равная скорости света в вакууме (при  $\epsilon=1$  и  $\mu=1$ ).

Электрическая ( $\epsilon_0$ ), магнитная ( $\mu_0$ ) и электродинамическая ( $c$ ) постоянные "связаны" равенством (6.26'). Скорость света в вакууме  $c \approx 2.998 \cdot 10^8$  м/с  $\approx 300\,000$  км/с. При построении международной системы физических единиц (СИ) было решено выбрать  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, а электрическую постоянную определить равенством  $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 \cdot c^2)$ .

Если в какой-либо плоскости  $z=z_0$  со временем происходят некоторые изменения величины  $\eta$ , то в соответствии с (6.25) они должны происходить также на любых расстояниях  $z-z_0$  от этой плоскости, но они возникают там с запаздываниями  $\Delta t$ , пропорциональными этим расстояниям. Допустим, что за промежуток времени  $t_a \leq t \leq t_b$  в плоскости  $z=z_0$  последовательно появились значения  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  величины  $\eta$ . Тогда к моменту  $t_b$  эти значения успеют распространиться на расстояния  $z_m, z_{m-1}, \dots$ , тем большие, чем раньше они появились в плоскости  $z=z_0$ . Следовательно, кривой  $\eta(z_0, t)$  соответствует такая же (с точностью до масштаба по оси абсцисс), но «обращённая» кривая  $\eta(z, t_b)$  (рис. 6.6).



**Рис. 6.6.**

Переход от временной волны (а) в плоскости  $z=z_0$  к пространственной волне (б) в момент  $t=t_b$

На кривой  $\eta(z, t_b)$  ординаты  $\eta$  следуют в обратном порядке по сравнению с их последовательностью на кривой  $\eta(z_0, t)$ .

Если бы выше в выражении для  $\eta(z, t)$  мы (вместо  $f_2(t+z/v)=0$ ) положили  $f_1(t-z/v)=0$ , то получили бы распространение поля  $\eta=f_2(t+z/v)$  со скоростью  $v$

в направлении противоположном направлению оси  $Z$  ( $\mathbf{v} \uparrow \downarrow Z$ ).

### III. Электромагнитная волна

Если зависимость величины  $\eta$  от времени является периодической, например синусоидальной, то её зависимость от  $z$  изображается волнообразной кривой, на которой ("временному") периоду  $T$  функции  $\eta(z_0, t)$  соответствует пространственный период функции  $\eta(z, t_b)$

$$\lambda = v \cdot T = \frac{T}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}}, \quad (6.27)$$

называемый *длиной волны*.

Непериодически меняющуюся величину  $\eta$  можно формально считать периодической с бесконечно большим периодом  $T$ .

С течением времени волна перемещается (распространяется) со скоростью  $\mathbf{V}$  по направлению  $Z$ , нормальному к поверхностям равных фаз (см. раздел V § 9 главы первой), которые в рассматриваемом случае являются параллельными плоскостями  $z=\text{const}$  (плоская волна). В общем случае поверхности равных фаз (волновые поверхности) – кривые и электромагнитное поле распространяется по нормальным к ним направлениям.

Очевидно, что зависимости от времени  $t$  функции  $\eta(z, t)$  и её производной  $\partial\eta(z, t)/\partial t$  имеют разный вид. Поэтому наблюдаются различия фаз компонент (по одному и тому же направлению) полей  $\mathbf{B}$  и  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  или  $\mathbf{D}$  и  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ , а также полей  $\mathbf{D}$  и  $\text{rot } \mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$  (при  $\mathbf{j}=0$ ) или  $\mathbf{B}$  и  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Отсюда – различие фаз электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля (см. дополнение 5 в § 4).

### § 4. ЭМ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Подставляя (6.13)<sub>3</sub> в (6.12)<sub>I</sub>, получаем первое уравнение Максвелла в "развёрнутом" виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.28)$$

Вне области действия стороннего поля ( $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ ) имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \epsilon_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.29)$$

### I. Телеграфные уравнения

Можно доказать, что в области  $V$ , в которой нет сторонних сил, а среда – электрически однородная ( $\nabla\gamma=0$ ,  $\nabla\epsilon=0$ ) и не очень плохо проводящая, нет электрических зарядов. Действительно, при указанных условиях из (6.15)<sub>I</sub> и (6.12)<sub>IV</sub> следует, что

$$\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\epsilon_a}, \quad (6.29')$$

то есть  $\partial\delta_{\text{свб}}/\partial t = -(\gamma/\varepsilon_a) \cdot \delta_{\text{свб}}$ . Но согласно (3.33') в электрически однородной среде плотность свободных зарядов  $\delta_{\text{свб}} = \varepsilon \cdot \delta_{\text{плн}} = \varepsilon \cdot \delta$ , поэтому

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_a} \cdot \delta. \quad (6.30)$$

Уравнение (6.30) справедливо для любой из плотностей:  $\delta = \delta_{\text{плн}}$ ,  $\delta_{\text{свб}}$  и  $\delta_{\text{свз}} = ((1-\varepsilon)/\varepsilon) \cdot \delta_{\text{свб}}$ . Решением уравнения (6.30) является функция времени  $t$

$$\delta(t) = \delta(t_0) \cdot \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right), \quad \text{где } t > t_0, \quad \text{а } \tau = \frac{\varepsilon_a}{\gamma} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \rho \quad (6.30')$$

– время релаксации, т. е. тот промежуток  $t-t_0$  времени, за который значение  $\delta$  уменьшается в  $e \approx 2.7218$  раз.

Возможно, здесь следует напомнить о некоторых "свойствах" экспоненты. Если в момент  $t_0$  в однородной проводящей среде окажется не поддерживаемый полем  $\mathbf{E}^{\text{ср}}$  заряд с плотностью  $\delta(t_0)$ , то за время  $2 \cdot \tau$  плотность  $\delta(t)$  станет в  $e^2$  раз меньше, чем  $\delta(t_0)$ . За время  $5 \cdot \tau$  плотность  $\delta(t)$  уменьшится в  $e^5 \approx 150$  раз, то есть заряд "практически исчезнет".

Пример. Каким может быть время релаксации  $\tau$ ? Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon \approx 10$  (значения  $\varepsilon$  такого порядка – типичны для многих горных пород), а удельное электрическое сопротивление  $\rho = 10000$  Ом·м (значение – очень высокое, например, для большинства осадочных горных пород). Тогда согласно (6.30')<sub>2</sub>  $\tau = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \rho \approx (10^{-9}/36 \cdot \pi) \cdot 10 \cdot 10000$  с  $\approx 10^{-6}$  с = 1 мкс.

Фактически при  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$  "оказавшийся" в однородной проводящей среде заряд будет нейтрализован имеющимися в такой среде свободными микрочарядами противоположного знака.

Обычно, даже в сравнительно плохо проводящей среде ( $\gamma = 10^{-6} - 10^{-4}$  См/м) удельная электропроводность, во много раз численно больше абсолютной диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_a \approx 10^{-10}$  Ф/м), поэтому величина  $\tau$  (в секундах) очень мала. Заряд, появившись в проводящей среде, почти мгновенно исчезает. Будем поэтому считать, что в области  $V$   $\delta = 0$  и согласно (6.12)<sub>V</sub>  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Если, кроме того, в этой области  $\nabla\mu = 0$ , то в ней согласно (6.12)<sub>III</sub>  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Таким образом, для области  $V$ , в которой  $\gamma > 0$ ,  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$ ,  $\nabla\gamma = 0$ ,  $\nabla\varepsilon = 0$  и  $\nabla\mu = 0$ , систему (6.12) надо заменить системой (6.31):

(очевидно, что последние три условия можно заменить (здесь и в аналогичных местах) менее жёсткими условиями:  $(\mathbf{E} \nabla\gamma) = 0$ ,  $(\mathbf{E} \nabla\varepsilon) = 0$ ,  $(\mathbf{H} \nabla\mu) = 0$ . Кроме того, ясно, что в доказательстве отсутствия зарядов в области  $V$  можно было заменить условие  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$  условием  $\text{div } \mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$ . Однако электромагнитное поле обычно определяют там, где  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$ )

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. } \text{rot } \mathbf{H} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{II. } \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{III. } \text{div } \mathbf{H} = 0, & \text{IV. } \text{div } \mathbf{E} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.31)$$

Аналогично изложенному в разделе I, § 3 и принимая во внимание равенство (1.80) для любого поля  $\mathbf{M}$ :  $(\text{rot rot } \mathbf{M} \equiv \text{grad div } \mathbf{M} - \nabla^2 \mathbf{M})$ , получаем из системы (6.31)

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H} &= \gamma \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon_a \cdot \text{rot } (\partial \mathbf{E} / \partial t) = -\gamma \cdot \mu_a \cdot (\partial \mathbf{H} / \partial t) - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot (\partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2), \\ \text{rot rot } \mathbf{E} &= -\mu_a \cdot \text{rot } \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu_a \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t) - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2), \end{aligned}$$

или согласно (1.80')



$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.32)$$

Эти волновые уравнения отличаются от (6.23) присутствием не только вторых, но и первых производных ( $\partial \mathbf{H}/\partial t$ ,  $\partial \mathbf{E}/\partial t$ ) по времени. Их называют *телеграфными* ("уравнениями телеграфистов") по аналогии с уравнениями, применяемыми в теории передачи электромагнитных сигналов по проводам.

О характере решений уравнений (6.32) будет сказано в конце раздела III.

## II. Квазистационарное поле. Уравнения теплопроводности

Обратимся к уравнениям (6.28) и (6.29) и допустим, что скорость изменения электромагнитного поля во времени и удельное электрическое сопротивление  $\rho$  среды достаточно малы для того, чтобы пренебречь слагаемым  $\mathbf{j}^{\text{cm}} = \partial \mathbf{D}/\partial t = \varepsilon_a \cdot \partial \mathbf{E}/\partial t$  сравнительно с величиной  $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}/\rho$ . Тогда получим вместо первых двух уравнений систем (6.12) и (6.31) уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6.33)$$

Электромагнитное поле, удовлетворяющее системе (6.12) с заменой первого уравнения уравнением (6.33)<sub>1</sub> т. е. с удалением слагаемого  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  из (6.12)<sub>1</sub>, будем называть *квазистационарным* (поле в квазистационарном приближении или случае, квазистационарный процесс). Уравнение (6.33)<sub>1</sub> идентично уравнению (5.42)<sub>1</sub> или (6.1)<sub>1</sub> для *стационарного* поля.

В области, в которой среда однородна и нет сторонних сил ( $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ,  $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ ), квазистационарное поле удовлетворяет системе (6.31) без слагаемого  $\varepsilon_a \cdot \partial \mathbf{E}/\partial t$  в первом уравнении. Вместо (6.32) получаем для квазистационарного поля уравнения *теплопроводности – диффузии*

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.34)$$

Математически идентичные уравнения (которые "содержат" вторые пространственные производные и первые производные по времени) применяют, например, в теории теплопередачи, обусловленной теплопроводностью среды.

## III. Затухание

Для выяснения характера квазистационарного поля, удовлетворяющего уравнениям (6.34), обратимся опять к полю (скалярным компонентам  $E_x, H_y, \dots$ )  $\eta(z, t)$  (см. раздел II, § 3) и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (6.35)$$

Подстановкой можно убедиться, что этому уравнению удовлетворяет функция  $\eta(z, t)$ , экспоненциально затухающая с увеличением  $|z|$ :



$$\eta(z, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \cdot \mu_a \cdot z^2}{4 \cdot t}\right) \quad (t > 0), \quad (6.35')$$

где  $C$  – множитель, зависящий от условий задачи.

Таким образом, первой производной по времени в уравнении (6.35) соответствует затухание поля  $\eta$  с увеличением  $|z|$ , между тем как вторая производная по времени в уравнении (6.24) согласно изложенному в § 3 определяет распространение поля в направлениях  $\pm \mathbf{1}_z$ . Поэтому, возвращаясь к уравнению (6.32), можно считать, что решениями телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (6.36)$$

являются поля  $\eta$ , распространяющиеся по направлениям коллинеарным оси  $Z$  с экспоненциальным затуханием.

То, чем, в основном, отличаются решения одномерного телеграфного уравнения (6.36) от решений уравнения струны (6.24) можно (упрощённо) охарактеризовать следующим образом.

1). Показанный на рис. 6.6, б пример соответствовал удовлетворяющей уравнению струны (6.24) плоской ЭМ волне в изоляторе. При  $\gamma=0$  с течением времени  $t$  поле  $\eta$  распространяется со скоростью  $v$  без изменения формы колебания. Но при  $\gamma>0$  форма "сигнала" (колебания)  $\eta$ , удовлетворяющего уравнению (6.36), меняется со временем.

2). В соответствии с (6.19), (6.20) в проводящей среде (при  $\gamma>0$ ) по мере распространения убывает электромагнитная энергия такого "сигнала" из-за её перехода в тепловую энергию.

3). Вместе с тем, скорость распространения (переднего) фронта ЭМ волны в проводящей среде – та же, что в изоляторе. В соответствии с (6.21)  $v = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ , т. е.  $v$  зависит от проницаемостей среды. В немагнитной среде (при  $\mu=1$ )  $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ , т. е. в такой среде  $v$  зависит только от диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

#### IV. Дополнения к § 4

1. Перейти от телеграфных уравнений (6.32) и (6.36) к уравнениям теплопроводности (6.34), (6.35) можно, формально положив  $\varepsilon=0$  (не бывает), чему согласно (6.26) соответствует  $c=\infty$ . В этом отражается особенность уравнения (6.34) – оно не учитывает ограниченность скорости распространения ЭМ поля.

2. Уравнение (6.33)<sub>1</sub> не отличается от уравнения (6.1)<sub>1</sub>. Следовательно, в квазистационарном случае магнитное поле токов определяют формулы, полученные в пятой главе для стационарного поля, причём для каждого мгновения надо в эти формулы подставлять значения величин и плотностей токов, соответствующие тому же мгновению (без запаздывания).

3. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  в квазистационарном случае согласно второму уравнению Максвелла отличается от квазипостоянного поля вихревым слагаемым  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ , возникающим вследствие электромагнитной индукции. Под влиянием поля  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$  в проводящей среде существуют электрические токи с плотностью  $\mathbf{j}^{\text{ЭМИ}} = \gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ , т. е. поле  $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{Кул}} + \mathbf{j}^{\text{ЭМИ}}$ .

4. Зависящее от среды поле  $\mathbf{j}$  создаёт во всём пространстве магнитное

поле, прибавляющееся к магнитному полю произвольно заданных токов (например, токов в проводах). В свою очередь согласно (6.12)<sub>II</sub> переменное магнитное поле создаёт вихревое поле  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$  и т. д.

5. Для того чтобы электромагнитное поле можно было считать квазистационарным, оно должно удовлетворять трём условиям квазистационарности.

Первое условие – не очень большая скорость изменения поля со временем и достаточно высокая удельная электропроводность среды. Оно было положено в основу определения квазистационарности поля (малость слагаемого  $|\partial\mathbf{D}/\partial t|$  сравнительно с  $|\mathbf{j}|$  в первом уравнении Максвелла).

Второе условие – замкнутость токов. Это условие следует, из уравнения (6.33)<sub>I</sub> так как  $\text{div rot } \mathbf{H} \equiv 0$ , следовательно,  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  и линии  $l_j$  могут быть только замкнутыми. Однако почти замкнутые токи не нарушают этого условия; их можно считать замкнутыми, исключив из рассмотрения малые области, занятые разрывами таких цепей.

Третье условие состоит в том, что размеры области пространства, содержащей токи, создающие магнитное поле, и точки наблюдения этого поля, не должны быть слишком велики во избежание заметного запаздывания изменений магнитного поля в точках этой области относительно возбудителей этого поля (вопреки сказанному в замечании 2) и связанной с этим несинхронности изменения электромагнитного поля в разных точках области. Однако остаётся несинхронность, связанная с различием зависимости от времени поля  $\mathbf{B} = \mu_a \cdot \mathbf{H}$  и его производной  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ .

6. Условие  $j^{\text{см}} \ll j$ , очевидно, выполнимо только в проводящей среде, а переменное магнитное поле в какой-либо точке пространства создают токи  $I$  и  $I^{\text{см}}$ , находящиеся где бы то ни было. Магнитное поле  $\mathbf{H}$  в произвольно взятой точке состоит из трёх слагаемых:  $\mathbf{H}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(3)}$ , создаваемых соответственно (1) токами проводимости, расположенными в проводящей среде, а также сторонними токами с плотностью  $\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стп}}$ , (2) токами смещения, расположенными там же, и (3) токами смещения, расположенными в непроводящей среде или в вакууме. В квазистационарном приближении допустимо пренебречь только вторым из этих слагаемых. Что же касается третьего слагаемого, то его относительный вклад может оказаться значительным. Это надо иметь в виду при изучении переменного электромагнитного поля в присутствии изолятора или плохо проводящей среды, например, воздуха.

## § 5. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В предыдущих четырёх главах мы изучали векторные поля, не имеющие задаваемых вихрей, либо источников. Для каждого из таких полей было удобно перейти от описывающих его векторов к потенциалу: скалярному или векторному. В этой главе мы изучаем векторное поле  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ , имеющее источники и вихри. Оказывается, что для такого, более сложного, поля также можно и целесообразно ввести потенциалы, через которые можно выразить

векторы, описывающие поле. Так же как и для менее сложных полей, переход к потенциалам удобен при изучении электромагнитного поля (см., например, раздел III) и при выполнении его расчётов – при решении прямых задач теории электромагнитного поля (см. главу седьмую).

## I. Потенциалы электромагнитного поля

Вернёмся к системе (6.12), определяющей электромагнитное поле в общем случае. Из (6.12)<sub>III</sub> ( $\text{div } \mathbf{B}=0$ ) согласно (1.74') следует, что  $\mathbf{B}=\text{rot } \mathbf{A}$ . Подставив это выражение для  $\mathbf{B}$  в уравнение (6.12)<sub>II</sub>, получаем  $\text{rot } \mathbf{E}=-\partial(\text{rot } \mathbf{A})/\partial t=-\text{rot } (\partial \mathbf{A}/\partial t)$ , т. е.  $\text{rot } (\mathbf{E}+\partial \mathbf{A}/\partial t)=0$ , откуда в соответствии с (1.62) следует, что  $\mathbf{E}+\partial \mathbf{A}/\partial t=-\text{grad } U$ . Таким образом, векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  могут быть выражены через некоторые функции  $\mathbf{A}$  и  $U$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U. \quad (6.37)$$

Эти функции называют *электродинамическими потенциалами*: векторным и скалярным.

Равенство (6.37)<sub>1</sub> не отличается от выражения (5.14)<sub>1</sub> для магнитного поля постоянного тока. В случае постоянного ЭМ поля производная  $\partial \mathbf{A}/\partial t=0$  и из (6.37)<sub>2</sub> получаем выражение для стационарного (или электростатического) поля  $\mathbf{E}$  и его потенциала  $U$ :  $\mathbf{E}=-\text{grad } U$ .

Нетрудно убедиться в том, что если  $\mathbf{A}_0$  и  $U_0$  – электродинамические потенциалы некоторого электромагнитного поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ , то его потенциалами являются также функции

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\nabla T \quad \text{и} \quad U=U_0-\partial T/\partial t, \quad (6.38)$$

где  $T$  – произвольное скалярное поле (функция  $a$  и  $t$ ).

## II. Уравнения Даламбера

Допустим, что в области  $V$ , в которой изучаем поле,  $\nabla \varepsilon=0$  и  $\nabla \mu=0$ , т. е. среда однородна по проницаемостям. Согласно (6.12)<sub>1</sub>, (6.29')<sub>2</sub> имеем равенства

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_a \cdot \mathbf{j} + \mu_a \cdot \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}.$$

Подставляя (6.37), (6.23) в эти равенства и принимая во внимание, что  $\text{rot rot } \mathbf{A}=\text{grad div } \mathbf{A}-\nabla^2 \mathbf{A}=\nabla (\nabla \mathbf{A})-\nabla^2 \mathbf{A}$ , получаем:

$$\nabla (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_a \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \nabla \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \left( \nabla \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla^2 U = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a},$$

где в соответствии с (6.26)  $v=1/\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}$ .

Таким образом, для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $U$  получены уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \mathbf{j} + \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right), \quad \nabla^2 U + \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \quad (6.39)$$

В этих уравнениях потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $U$  не разделены, но равенствами (6.37)

потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $U$ , как уже было отмечено, определяются не полностью. Это позволяет нам дополнить равенства (6.37) некоторым условием, ограничивающим многозначность потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $U$ , «нормировать» их. Для этого применяют *калибровочное уравнение*, подбираемое так, чтобы привести уравнения электродинамических потенциалов к удобному виду. Положив в данном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (6.40)$$

получим вместо (6.39) волновые уравнения Даламбера

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \mathbf{j}, \quad \nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}, \quad (6.41)$$

или, пользуясь оператором Даламбера  $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ :

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_a \cdot \mathbf{j}, \quad \square^2 U = -\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_a. \quad (6.41')$$

Калибровка потенциалов отражается на уравнениях для них и, следовательно, на выражениях для  $\mathbf{A}$  и  $U$ , получаемых в результате решения этих уравнений, но не на решениях  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{E}$  системы (6.12).

Для области  $V$ , в которой не только  $\nabla \varepsilon = 0$  и  $\nabla \mu = 0$ , но также  $\mathbf{j} = 0$  и  $\delta_{\text{свб}} = 0$ , получаем для  $\mathbf{A}$  и  $U$  вместо (6.41) однородные волновые уравнения:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (6.41'')$$

соответствующие системе уравнений (6.22). Они аналогичны полученным из этой же системы волновым уравнениям (6.23) для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ .

### III. Запаздывающие потенциалы

Допустим, что в неограниченной однородной среде электромагнитное поле создают точечные заряды и линейные токи. Определим электродинамические потенциалы там, где нет зарядов и токов. Каждому точечному заряду  $e_{q\text{свб}}$ , находящемуся в точке  $q$ , соответствует потенциал  $U$ , обладающий сферической симметрией относительно этой точки. Возьмём сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с началом  $O$  в точке  $q$ . Тогда  $U(a, t) = U(R, t)$  и при  $R > 0$  уравнение (6.41'')<sub>2</sub> согласно (1.66'') примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (U \cdot R)}{\partial R^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 (U \cdot R)}{\partial t^2}.$$

Одно из двух решений этого уравнения (уравнения струны для функции  $(U \cdot R)$ ) для скалярного потенциала  $U$  это (соответствующее расходящейся сферической волне) поле

$$U(R, t) = \frac{f(t')}{R} = \frac{f(t - R/v)}{R},$$

где  $f$  – произвольная, дважды дифференцируемая по  $R$  и  $t$  функция аргумента  $t' = t - R/v$ . При  $R \rightarrow 0$  имеем  $t' \rightarrow t$ ,  $U(R, t) \rightarrow f(t)/R$ . Чтобы в соответствии с

(3.38')<sub>1</sub> потенциал постоянного поля  $U(R)$  был равен  $e_{q\text{свб}}/(4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R)$ , положим  $f(t') = e_{q\text{свб}}(t')/(4\pi \cdot \varepsilon_a)$ . Таким образом,  $U(R, t) = e_{q\text{свб}}(t')/(4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R)$ , т. е.  $U(a, t) = e_{q\text{свб}}(t - L_{qa}/v)/(4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot L_{qa})$ , так как  $R = L_{qa}$ . Аналогичное выражение получаем для векторного потенциала  $\mathbf{dA}$ , соответствующего элементу  $I \cdot d\mathbf{l}_q$  тока  $I$ . Из уравнения (6.41)<sub>1</sub> в согласии с (5.53'') получаем  $\mathbf{dA}(a, t) = \mu_a \cdot I \cdot d\mathbf{l}_q(t - L_{qa}/v)/(4\pi \cdot L_{qa})$ . Переходя от возбудителей  $e_q$  и  $I \cdot d\mathbf{l}_q$  к объёмным элементам зарядов и токов и интегрируя по всему пространству, получаем выражения для запаздывающих потенциалов:

$$\mathbf{A}(a, t) = \mu_a \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}(q, t - L_{qa}/v)}{4\pi \cdot L_{qa}} dV, \quad U(a, t) = \frac{1}{\varepsilon_a} \cdot \int_V \frac{\delta_{\text{свб}}(q, t - L_{qa}/v)}{4\pi \cdot L_{qa}} dV. \quad (6.41''')$$

Согласно (6.41''') потенциалы  $\mathbf{A}(a, t)$  и  $U(a, t)$  определяют те значения, которые имели  $\mathbf{j}$  и  $\delta_{\text{свб}}$  в точках  $q$  в моменты  $t' = t - L_{qa}/v$ . Таким образом, значения потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $U$  (и определяемое ими ЭМ поле) "появляются" в точке  $a$  с опозданиями  $\Delta t = t - t' = L_{qa}/v$ , пропорциональными расстояниям от точек  $q$  до точки  $a$ .

Определяемые формулами (6.41''') электродинамические потенциалы следует рассматривать как решения уравнений Даламбера (6.41), аналогичные решениям (5.53'') и (3.38') уравнений Пуассона (5.52)<sub>3</sub> и (3.37)<sub>3</sub> для  $\mathbf{A}$  и  $U_E$  (см. конец § 8 главы второй). Формулы (6.41''') выражают связь между фактическими распределениями (в пространстве и времени) потенциалов электромагнитного поля и его возбудителей. Но для того, чтобы рассчитать по этим формулам потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $U$ , надо было бы знать поля  $\mathbf{j}(q, t)$  и  $\delta_{\text{свб}}(q, t)$ . Между тем в непроводящей среде  $\mathbf{j} = 0$ , а в проводящей среде  $\delta_{\text{свб}}$  и  $\mathbf{j}$  зависят от электромагнитного поля. Но *есть часть возбудителей электромагнитного поля*, которая может быть задана вне зависимости от этого поля – это *сторонние токи и заряды*, о чём пойдёт речь ниже.

#### IV. Сторонние возбудители поля

Сторонними будем называть возбудители электромагнитного поля, задаваемые произвольно, т. е. независимо от ЭМ поля и среды (модели среды). В предыдущих главах встречались такие возбудители, например заряды  $e_{\text{свб}}$  в непроводящей среде (глава третья); в пятой главе считались известными все токи.

Пусть  $l$  – проводящая, изолированная от окружающей проводящей среды, линия. Включив в неё генератор переменного тока, можно создать в линии  $l$  сторонний (контролируемый нами и не зависящий от среды) ток  $I^{\text{стр}}$  (рис. 6.7) желаемой величины. Соответствующую совокупность таких токов элементарной величины  $dI^{\text{стр}}$  можно формально заменить сторонним объёмным током  $I^{\text{стр}}$  с плотностью  $\mathbf{j}^{\text{стр}}$ . Наряду с таким током имеем ток  $I_{\text{зав}} = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}$  с (*зависящей от поля  $\mathbf{E}$  и электрических параметров среды*) плотностью  $\mathbf{j}_{\text{зав}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ , обусловленный действующим в среде



электрическим полем  $\mathbf{E}$ , подлежащим определению (при расчёте поля). В результате получаем ток с плотностью  $\mathbf{j}_{\text{плн}} = \mathbf{j}_{\text{зав}} + \mathbf{j}^{\text{стр}}$ , где  $\mathbf{j}_{\text{зав}}$  – плотность тока  $I_{\text{зав}}$ .

Ток  $I_{\text{зав}}$  иногда называют током проводимости (и обозначают  $I_{\text{пр}}$ ). Но этот термин мы, следуя традиции, применили в другом смысле ( $I_{\text{зав}} = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{зав}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}}$ ). В случае стационарного электрического поля таким током  $I_{\text{зав}} = I_{\text{пр}} = \pm I$  был ток эмиссии электродов  $A, B$  в примере на рис. 4.20 в главе четвёртой.

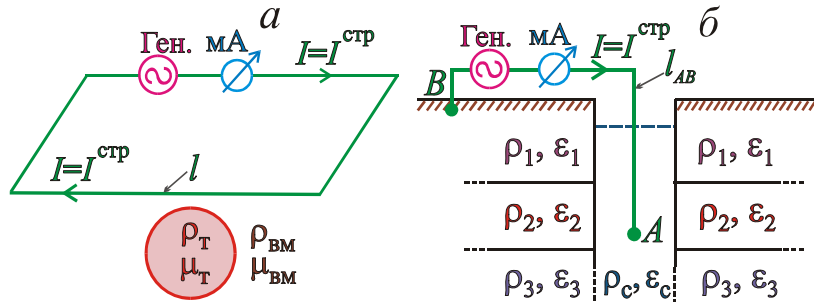


Рис. 6.7.

Сторонний ток  $I^{\text{стр}}$  замкнутый (а) и разомкнутый (б)

$de^{\text{стр}}/dt = \mp I^{\text{стр}}$ .

Для простоты отвлекаемся здесь от распределения по линии  $l_{12}$  источников поля  $\mathbf{j}_{\text{см}}$ . Для допустимости такого пренебрежения можно вообразить, что на концах разомкнутой цепи мы имеем ёмкости, достаточно большие по сравнению с ёмкостью линии  $l_{12}$ . В частности, заменяя электрический диполь элементом  $Idl$  линейного тока (см. § 3 главы седьмой), следует мысленно дополнить этот элемент двумя идеально проводящими шаровыми электродами или ёмкостями (аналог вибратора Герца).

В более общем случае есть свободные заряды  $e_{\text{пр}}$ ,  $e^{\text{стр}}$  с плотностями  $\delta_{\text{пр}}$ ,  $\delta^{\text{стр}}$ . Для величин  $e_{\text{пр}}$ ,  $e^{\text{стр}}$ ,  $I_{\text{пр}}$ ,  $I^{\text{стр}}$  и плотностей  $\delta_{\text{пр}}$ ,  $\delta^{\text{стр}}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ ,  $\mathbf{j}^{\text{стр}}$  справедливы выражения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{пр}} &= -\frac{\partial \delta_{\text{пр}}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{стр}} &= -\frac{\partial \delta^{\text{стр}}}{\partial t}, \\ \sum_k I_{k\text{пр}} &= -\frac{de_{q\text{пр}}}{dt}, & \sum_k I_k^{\text{стр}} &= -\frac{de_q^{\text{стр}}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

аналогичные соотношениям (4.5), (4.20').

Индекс при  $e_{\text{пр}}$  (и  $\delta_{\text{пр}}$ ) указывает на связь этой части свободных зарядов с током проводимости  $I_{\text{пр}}$ . Помимо зарядов  $e^{\text{стр}}$  и  $e_{\text{пр}}$  существуют также (являющиеся частью зарядов  $e_{\text{зав}}$ ) связанные заряды  $e_{\text{свз}}$ , зависящие от электрического поля и  $\epsilon$  (см. главу третью).

Таким образом, в первое и четвёртое уравнения системы (6.12) следует подставить

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \delta_{\text{свб}} = \delta_{\text{пр}} + \delta^{\text{стр}}, \quad (6.42')$$

где величины в правых частях связаны соотношениями (6.42)<sub>1,2</sub>.

Сравнивая (6.42')<sub>1</sub> с (4.32)<sub>1</sub>, получаем

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \gamma \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}^{\text{стр}} = \gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}. \quad (6.42'')$$

Однако, при введении поля  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$  (в главе четвёртой) было важно только то, что оно отличается от кулонова поля и поэтому может быть направлено

На концах незамкнутой линии  $l_{12}$  с током  $I^{\text{стр}}$  (линия  $l_{AB}$  на рис. 6.7, б) существуют электрические заряды  $e_{\text{плн}}$ . Часть  $e^{\text{стр}}$  этих зарядов не зависит от среды. В соответствии с (4.20') для этой части зарядов производная

против него. Что же касается поля  $\mathbf{j}^{\text{стр}}$ , то его отличительным признаком является произвольность его задания. При этом природа сил, заставляющих заряды двигаться, нас не интересует; поля  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  и  $\mathbf{j}^{\text{стр}}$  могут быть порождены силами одной и той же природы (полем  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ ).

За исключением случаев стороннего поля в земле, о котором шла речь во вступлении к § 6 главы четвертой, нас обычно не интересуют отдельно взятые сомножители произведения  $\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}} = \mathbf{j}^{\text{стр}}$  или числитель и знаменатель в отношении  $(\mathcal{E}^{\text{стр}}/R) = I^{\text{стр}}$ , а случай зависимости  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$  от  $\mathbf{E}$  (вызванная поляризация) здесь не рассматривается. Таким образом, в формулах (6.42'') отличие поля  $\mathbf{E}$  от поля  $\mathbf{E}^{\text{стр}}$  состоит в том, что первое из них (при решении прямых задач) подлежит определению, а второе, умноженное на  $\gamma$ , является заданной функцией.

## V. Телеграфные уравнения для электродинамических потенциалов

Выведем уравнения для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $U$  в области  $V$ , в которой среда однородна ( $\nabla\gamma=0$ ,  $\nabla\varepsilon=0$ ,  $\nabla\mu=0$ ). Из (6.12)<sub>I,IV</sub>, (6.42')<sub>1</sub>, (6.42'') получаем при этих условиях

$$\text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \mathbf{E} = \mu_a \cdot \mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}, \quad (6.43)$$

где в соответствии с (6.24')  $(1/v^2) = \varepsilon_a \cdot \mu_a$ .

Подставим выражения (6.37) для  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в (6.43). Из (6.43)<sub>1</sub>, принимая во внимание, что согласно (1.80), (1.80')  $\text{rot rot } \mathbf{A} = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \nabla (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  имеем

$$(\nabla (\nabla \mathbf{A})) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu_a \cdot \gamma \cdot \nabla U = \mu_a \cdot \mathbf{j}^{\text{стр}},$$

т. е.

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_a \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_a \cdot \mathbf{j}^{\text{стр}} + \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \mu_a \gamma U \right). \quad (6.43')$$

Из (6.43)<sub>2</sub> получаем

$$\nabla^2 U + \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \quad (6.43'')$$

Применяя нормирование (условие калибровки)

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \mu_a \cdot \gamma \cdot U, \quad (6.44)$$

приводим уравнения (6.43') и (6.43'') к удобному виду

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\mu_a \cdot \mathbf{j}^{\text{стр}}, \\ \nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Для области  $V$ , в которой  $\mathbf{j}^{\text{стр}}=0$  и  $\delta_{\text{свб}}=0$ , получаем однородные



телеграфные уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad \nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (6.46)$$

аналогичные уравнениям (6.32) для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ .

Для случая квазистационарного поля удаляем из (6.43)<sub>1</sub> слагаемое  $-(1/v^2) \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ , вследствие чего из уравнения (6.43') выпадают слагаемые  $-(1/v^2) \cdot (\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2)$  и  $(1/v^2) \cdot (\partial U / \partial t)$ . Поэтому при нормировании  $\text{div} \mathbf{A} = -\mu_a \cdot \gamma \cdot U$  имеем для  $\mathbf{A}$  и  $U$  вместо (6.45) и (6.46) уравнения теплопроводности – диффузии

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_a \cdot \mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \nabla^2 U - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\epsilon_a}, \quad (6.45')$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad \nabla^2 U - \mu_a \cdot \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (6.46')$$

## VI. Замечания

1. Описанный выше способ введения электродинамических потенциалов не является единственным. Часто целесообразно применять другие потенциалы, по-иному связанные с электромагнитным полем и иначе нормированные. Об этом см. § 2 главы седьмой.

2. Однородные (т. е. без функций возбуждения), уравнения (6.41''), (6.46), (6.46') и соответствующие им (автономные) системы вида (6.22), справедливые там, где нет возбудителей поля, независимых от него, не являются полными и недостаточны для определения электромагнитного поля. Эта неполнота компенсируется в той или иной мере некоторыми сведениями о возбудителях поля или условиями, заменяющими такие сведения. Так, например, в разделе II, § 3 было задано, что поле лежит в плоскости  $z = \text{const}$  и не зависит от координат  $x$  и  $y$ . Более полные выражения для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  должны удовлетворять системе (6.12) и соответствующим ей уравнениям (6.41), (6.45) или (6.45').

3. Полагая (формально)  $(1/v) = 0$  в уравнениях (6.41), (6.45), (6.46), т. е. отбрасывая слагаемые  $-(1/v^2) \cdot (\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2)$ ,  $-(1/v^2) \cdot (\partial^2 U / \partial t^2)$ , мы согласно (6.26) должны считать скорость  $v = \infty$ , что равносильно допущению синхронности изменений поля и его возбудителей.

4. С другой стороны, времена, необходимые для распространения, поля от его возбудителей до очень близких к ним точек наблюдения  $a$ , так малы, что поле этих возбудителей в их ближайших окрестностях должно удовлетворять уравнениям электродинамических потенциалов без слагаемых со второй производной по времени.

5. Точечные заряды и линейные токи образуют в электромагнитном поле особые точки и линии. Из сказанного в замечании 4 следует, что у таких точек и линий должны выполняться такие же условия, как в квазистационарном электромагнитном поле.

## § 6. ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕЕСЯ ЭМ ПОЛЕ

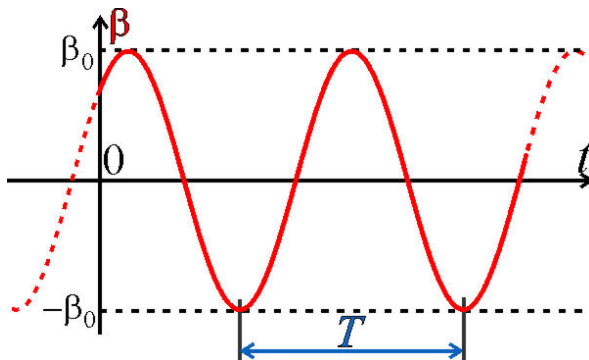
Скалярное поле, меняющееся со временем синусоидально, т. е. по закону синуса или косинуса, называют *гармонически меняющимся*. У гармонически меняющегося векторного поля по такому закону меняется скалярная компонента по любому направлению. Величина  $\beta=U, E_x, H_y, A_z, \dots$ , характеризующая такое поле, совершает гармонические колебания.

В дальнейшем в этой и следующей главах гармонически меняющимся полям будет уделено основное внимание. Объясняется это не только широким применением этого вида переменных электромагнитных полей в разведочной геофизике. Разложение в ряд Фурье позволяет нам представить любое периодически меняющееся поле совокупностью гармонически меняющихся полей (см. раздел VIII), а в более общем случае можно воспользоваться интегралом Фурье (см. раздел IX). Таким образом, закономерности гармонически меняющихся электромагнитных полей и результаты их расчётов для различных условий имеют общее значение.

Иногда гармонически меняющееся электромагнитное поле называют стационарным (установившимся). Но в этой книге стационарные поля – это постоянное электрическое поле в проводящей среде и магнитное поле постоянного электрического тока.

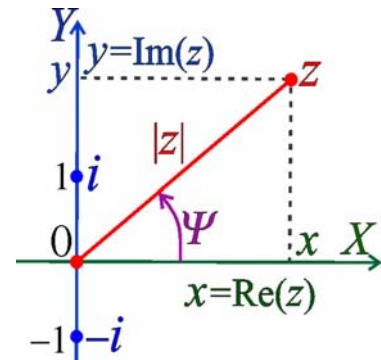
### I. Скалярное поле

Если  $\beta(t)=I, \mathcal{E}^{\text{стп}}, \dots$  – гармонически меняющаяся скалярная величина, то  $\beta(t)=\beta_0 \cdot \cos \Phi(t)$ , где  $\beta_0$  – *амплитуда* величины  $\beta(t)$ , которую обычно считают положительной ( $\beta_0 \geq 0$ ), а  $\Phi(t)=(2\pi \cdot t/T)+\varphi=(2\pi \cdot f \cdot t)+\varphi=(\omega \cdot t)+\varphi$ . Здесь  $\Phi(t)$  – угол, называемый *фазой* этой величины;  $T$  – *период* (рис. 6.8);



**Рис. 6.8.**

Гармонически меняющаяся скалярная величина  $\beta$



**Рис. 6.9.**

Комплексное число  $z=x+iy$ ; его модуль  $|z|$  и аргумент  $\Psi$

$f=1/T$  – *частота* колебаний величины  $\beta$ ;  $\omega=2\pi \cdot f=2\pi/T$  – *круговая частота*. Угол  $\varphi=\Phi(0)$  называют *начальной фазой* величины  $\beta(t)$ .

Если же  $\beta(a, t)=U, E_x, H_y, A_z, \dots$  – скалярное гармонически меняющееся поле или скалярная компонента гармонически меняющегося векторного поля, то

$$\beta(a, t)=\beta_0(a) \cdot \cos [2\pi \cdot f \cdot t + \varphi(a)] = \beta_0(a) \cdot \cos [\omega \cdot t + \varphi(a)], \quad (6.47)$$

где амплитуда  $\beta_0(a)$  и начальная фаза  $\varphi(a)$  не зависят от времени  $t$ , но зависят

от положения (в пространстве) точки  $a$ .

Иногда понятию частоты придают более общий, в частности, алгебраический смысл, например при представлении функции времени интегралом Фурье, см. раздел IX.

Часто угол  $\varphi(a)$  называют короче: фазой величины  $\beta(a, t)$ . В (6.47) иногда вместо  $+\varphi(a)$  пишут  $-\varphi(a)$ .

Казалось бы выбором  $\varphi(a)=0$  можно привести (6.47) к виду  $\beta(a, t)=\beta_0(a)\cdot\cos(\omega\cdot t)$  ( $\Phi=\omega\cdot t$ ). Однако произвольно выбирать значение  $\varphi(a)$  можно в общем случае только для одной точки  $a$  и одной из величин  $\beta$ , описывающих электромагнитное поле, так как эти величины и каждая из них в разных точках  $a$  в общем случае меняются не синхронно; они имеют разные начальные фазы.

Согласно (6.47)

$$\beta(a, t)=[\beta_0(a)\cdot\cos\varphi(a)]\cdot\cos(\omega t)+[\beta_0(a)\cdot\sin\varphi(a)]\cdot\cos(\omega t+\pi/2), \quad (6.47')$$

т. е. поле  $\beta(a, t)$  может быть представлено в виде суммы двух колебаний с начальными фазами 0 и  $\pi/2$  и с "амплитудами"  $\beta_0(a)\cdot\cos\varphi(a)$  и  $\beta_0(a)\cdot\sin\varphi(a)$ .

## II. Комплексная запись

В этом разделе и далее в этой и следующей главах придётся совершать некоторые действия с комплексными величинами. Напомним кратко о комплексных числах.

Комплексное число (или величина)  $z=x+i\cdot y$ , где  $x$  и  $y$  – соответственно действительная часть ( $\text{Re}(z)$ ) и коэффициент при мнимой части ( $\text{Im}(z)$ ) числа  $z$ , а  $i=\sqrt{-1}$  – мнимая единица, а  $i^2=-1$ . Каждому комплексному числу  $z$  можно поставить в соответствие точку на комплексной плоскости с декартовыми осями  $X$ ,  $Y$  (рис. 6.9). На оси  $X$  ( $y=0$ ) лежит множество действительных чисел, а на оси  $Y$  ( $x=0$ ) – множество мнимых чисел. В частности, на оси  $Y$  лежат числа  $i$  и  $-i$  (см. рис. 6.9). Модуль комплексного числа  $z$ :  $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ , а аргумент комплексного числа  $z$ :  $\Psi=\arg(z)$ . В частности, модули чисел  $i$  и  $-i$  равны единице, а аргументы:  $\arg(i)=\pi/2$ ,  $\arg(-i)=-\pi/2$ . Действительная часть комплексного числа  $x=|z|\cdot\cos\Psi$ , а коэффициент при мнимой части  $y=|z|\cdot\sin\Psi$ , следовательно, можно выразить комплексное число  $z$  через его модуль и аргумент:  $z=|z|\cdot(\cos\Psi+i\cdot\sin\Psi)$ .

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\exp(\pm i\cdot\Psi)=\cos(\Psi)\pm i\cdot\sin(\Psi) \quad (6.47'')$$

и представим число  $z=x+i\cdot y=|z|\cdot(\cos\Psi+i\cdot\sin\Psi)$  в виде  $z=|z|\cdot\exp(i\cdot\Psi)$ . Тогда для произведения  $z_3$  двух чисел  $z_1=|z_1|\cdot\exp(i\cdot\Psi_1)$  и  $z_2=|z_2|\cdot\exp(i\cdot\Psi_2)$  получаем  $z_3=z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\exp(i\cdot\Psi_1)\cdot\exp(i\cdot\Psi_2)=\{|z_1|\cdot|z_2|\}\cdot\exp[i\cdot(\Psi_1+\Psi_2)]=|z_3|\cdot\exp[i\cdot\Psi_3]$ . То есть модуль  $|z_3|=|z_1|\cdot|z_2|$ , а аргумент  $\Psi_3=\Psi_1+\Psi_2$ . В частности, если  $z_1=\pm i=0\pm i=1\cdot\exp(\pm i\cdot\pi/2)$ , то произведение  $z_3=\pm i\cdot z_2=1\cdot|z_2|\cdot\exp(\pm i\cdot\pi/2)\cdot\exp(i\cdot\Psi_2)=\{1\cdot|z_2|\}\cdot\exp[i\cdot(\pm\pi/2+\Psi_2)]=|z_2|\cdot\exp[i\cdot(\Psi_2\pm\pi/2)]=|z_3|\cdot\exp[i\cdot\Psi_3]$ . Т. е. модуль  $|z_3|=|z_2|$ , а аргумент  $\Psi_3$  числа  $z_3=\pm i\cdot z_2$  отличается от аргумента  $\Psi_2$  числа  $z_2$  на  $\pm\pi/2$ .

Пользуясь формулой (6.47''), представим (6.47) в виде

$$\beta(a, t) = \text{Re}[\beta(a, t)], \quad (6.48)$$

$$\text{где } \check{\beta}(a, t) = \beta_0(a) \cdot \exp\{-i \cdot [\omega t + \varphi(a)]\} \quad (6.48')$$

или

$$\check{\beta}(a, t) = \left\{ \check{\beta}_0(a) \right\} \cdot \left\{ \exp(-i\omega t) \right\}, \text{ где } \check{\beta}_0(a) = \beta_0(a) \cdot \exp[-i \cdot \varphi(a)] \quad (6.48'')$$

– не зависящая от времени  $t$  комплексная амплитуда поля  $\beta(a, t)$ .

Удобство записи (6.48'') состоит в разделении переменных  $a$  и  $t$ , облегчающем дифференцирование по каждому из них. Кроме того, множитель  $\exp(-i \cdot \omega t)$  – временной фактор – очень удобен при дифференцировании и интегрировании.

Из первого выражения в (6.48'') следует, что при применении комплексной записи (комплексное) скалярное поле  $\check{\beta}(a, t)$  является произведением двух взаимно-независимых функций. Первая из них – комплексная амплитуда  $\check{\beta}_0(a)$  не зависит от времени  $t$ , а вторая – временной фактор  $\exp(-i \cdot \omega t)$  при фиксированной круговой частоте  $\omega$  зависит только от времени  $t$  и одинаков в любой точке пространства. Согласно второму выражению в (6.48''), модуль  $|\check{\beta}_0(a)|$  комплексной амплитуды  $\check{\beta}_0(a)$  равен (действительной) амплитуде  $\beta_0(a)$  поля  $\beta(a, t)$ , а аргумент комплексной амплитуды  $\arg(\check{\beta}_0(a)) = -\varphi(a)$  равен взятой с противоположным знаком (при временном факторе  $\exp(-i \cdot \omega t)$ ) начальной фазе  $\varphi(a)$  поля  $\beta(a, t)$ . В соответствии с (6.48'')<sub>2</sub> и формулой Эйлера (6.47'') действительная часть комплексной амплитуды  $\text{Re}(\check{\beta}_0(a)) = \beta_0(a) \cdot \cos(\varphi(a))$  и коэффициент при её мнимой части  $\text{Im}(\check{\beta}_0(a)) = -\beta_0(a) \cdot \sin(\varphi(a))$  связаны с "амплитудами" меняющихся со временем, как  $\cos(\omega t)$  и  $\cos(\omega t + \pi/2)$  составляющих поля  $\beta$  в выражении (6.47').

Итак, при заданных круговой частоте  $\omega$  и времени  $t$  комплексная амплитуда  $\check{\beta}_0(a)$  полностью характеризует зависимость поля  $\beta(a, t)$  (его амплитуды, начальной фазы) от положения (в пространстве) точки  $a$ .

То, что при записи в (6.48'')<sub>1</sub> для  $\check{\beta}(a, t)$  аргументы (переменные)  $a, t$  разделены, делает простым дифференцирование поля  $\check{\beta}(a, t)$  по времени  $t$  и по пространственным координатам. Например, производная  $\partial(\check{\beta}(a, t))/\partial t = \partial[\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)]/\partial t = \check{\beta}_0(a) \cdot \partial[\exp(-i \cdot \omega t)]/\partial t = -i \cdot \omega \cdot \check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i \cdot \omega t) = -i \cdot \omega \cdot \check{\beta}(a, t)$ . Учитывая сказанное в начале этого раздела, это означает, что амплитуда производной  $\partial\beta/\partial t$  поля  $\beta$ , равная  $\omega \cdot \beta_0$ , отличается от амплитуды  $\beta_0$  поля  $\beta$  множителем  $\omega$  (при  $\omega > 1$  амплитуда производной  $\partial\beta/\partial t$  численно больше амплитуды поля  $\beta$  в  $\omega$  раз), а начальные фазы полей  $\partial\beta/\partial t$  и  $\beta$  различаются на  $\arg(-i) = -\pi/2$ .

Аналогичным образом для пространственных производных поля  $\check{\beta}(a, t)$  можно воспользоваться тем, что временной фактор  $\exp(-i \cdot \omega t)$  не зависит от пространственных координат. То есть, например,  $\text{grad}[\check{\beta}(a, t)] = \text{grad}[\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)] = \text{grad}[\check{\beta}_0(a)] \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$ .

Вместо  $-i\omega t$  можно пользоваться (что часто делают) показателем  $i\omega t$ . Это приводит к

изменениям знаков в некоторых выражениях для  $\check{\beta}(a, t)$ , но не влияет на выражения для поля  $\beta(a, t)$ .

Если  $\beta(t)=I, \mathcal{E}^{\text{стр}}, \dots$  – гармонически меняющаяся скалярная величина, то при применении комплексной записи вместо  $\beta(t)=\beta_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  имеем:  $\beta(t)=\text{Re } \check{\beta}(t)$ , где  $\check{\beta}(t)=\beta_0 \cdot \exp[-i \cdot (\omega t + \varphi)]=\check{\beta}_0 \exp(-i \cdot \omega t)$ , а  $\check{\beta}_0=\beta_0 \cdot \exp(-i \cdot \varphi)$ .

Будем вместо действительной части  $\beta=\text{Re } \check{\beta}$  величины (или скалярной компоненты поля)  $\beta$  рассматривать всю эту величину, т. е. прибавим к фактически интересующей нас величине  $\beta=\text{Re } \check{\beta}$  мнимое слагаемое  $i \cdot \text{Im } \check{\beta}$ .

Линейные операции над комплексными величинами (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование) выполняются отдельно над их действительными и мнимыми частями. Поэтому действительная часть  $\text{Re } \check{\beta}_{\text{рез}}$  комплексной величины  $\check{\beta}_{\text{рез}}$ , получающейся в результате применения таких операций к комплексной величине  $\check{\beta}$ , совпадает с результатом тех же операций над её действительной частью  $\text{Re } \check{\beta}$ . Таким образом, мы можем вместо реальных величин  $\beta=\text{Re } \check{\beta}$  пользоваться более удобными величинами  $\check{\beta}$ , производить над ними линейные операции, имея при этом ввиду, что в получаемом результате реальный смысл имеет только действительная часть  $\text{Re } \check{\beta}$ , а мнимую часть  $\text{Im } \check{\beta}$  можно опустить. Аналогичное справедливо в отношении вводимых ниже комплексных векторов  $\check{\mathbf{N}}$ . Однако при нелинейных операциях (например, при перемножении гармонически меняющихся величин или полей, в частности – скалярном или векторном произведении гармонически меняющихся векторов) при применённом здесь подходе нельзя заменять  $\beta$  комплексными величинами  $\check{\beta}$ .

Согласно (6.48'')<sub>2,1</sub>

$$\check{\beta}_0(a) = \beta_0(a) \cdot \exp[-i \cdot \varphi(a)] = \text{Re } \check{\beta}_0(a) + i \cdot \text{Im } \check{\beta}_0(a), \quad (6.49)$$

где в соответствии с формулой Эйлера (6.47'')

$$\text{Re } \check{\beta}_0(a) = \beta_0(a) \cdot \cos \varphi(a), \quad \text{Im } \check{\beta}_0(a) = -\beta_0(a) \cdot \sin \varphi(a),$$

$$\check{\beta}(a, t) = \check{\beta}_0(a) \cdot \exp[-i \cdot \omega t]. \quad (6.49')$$

Как уже было сказано, величину  $\check{\beta}_0(a)$  называют *комплексной амплитудой* поля  $\beta(a, t)$  и в отличие от неё величину  $\beta_0(a)$  – *действительной* (или вещественной) *амплитудой*. Если  $\beta_0 \geq 0$ , то согласно (6.49) модуль комплексной амплитуды  $\check{\beta}_0(a)$  и её взятый с обратным знаком аргумент совпадают соответственно с действительной

амплитудой  $\beta_0(a)$  и начальной фазой  $\varphi(a)$ , величины  $\beta(a, t)$ . Действительная часть и взятый с обратным знаком коэффициент при мнимой части комплексной амплитуды  $\check{\beta}_0(a)$  равны "амплитудам" слагаемых правой части (6.47'). Таким образом, для пространственной характеристики поля  $\beta(a, t)$  (определения его зависимости от точки  $a$ ) можно вместо  $\text{Re } \check{\beta}(a, t)$  пользоваться комплексной амплитудой  $\check{\beta}_0(a)$ . То же справедливо и для производных. Например, согласно (6.47), (6.49), (6.49') производные по времени

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -\omega \cdot \beta_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = (\omega \cdot \beta_0) \cdot \cos\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right], \\ \frac{\partial \check{\beta}}{\partial t} &= -i \cdot \omega \cdot \check{\beta} = \omega \cdot \check{\beta} \cdot \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \left\{ (\omega \cdot \beta_0) \cdot \exp\left[-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\} \cdot \exp(-i \cdot \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (6.49'')$$

где  $(\omega \cdot \beta_0)$  и  $-(\varphi + \pi/2)$  – модуль и аргумент комплексной амплитуды поля  $\partial \check{\beta} / \partial t$ . Таким образом, модуль комплексной амплитуды поля  $\partial \check{\beta} / \partial t$  равен амплитуде  $\omega \cdot \beta_0$  поля  $\partial \beta / \partial t$ , а взятый с обратным знаком аргумент комплексной амплитуды поля  $\partial \check{\beta} / \partial t$  равен начальной фазе  $\varphi + \pi/2$  поля  $\partial \beta / \partial t$ .

### III. Векторное поле

Скалярную компоненту  $N_l$  векторного гармонически меняющегося поля  $\mathbf{N}$  по любому направлению  $l$  определяет выражение (6.47') для скалярного поля  $\beta$ . Тогда, например, в соответствии с равенством (в.4) в разделе "Введение" гармонически меняющееся поле  $\mathbf{N}$  в декартовых координатах определяет совокупность следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_y + \mathbf{N}_z = \mathbf{1}_x N_x + \mathbf{1}_y N_y + \mathbf{1}_z N_z, \quad N_x(a, t) = N_{x0}(a) \cdot \cos[\omega t + \varphi_x(a)], \\ N_y(a, t) &= N_{y0}(a) \cdot \cos[\omega t + \varphi_y(a)], \quad N_z(a, t) = N_{z0}(a) \cdot \cos[\omega t + \varphi_z(a)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.49''')$$

Конечно, амплитуды  $N_{x0}, N_{y0}, N_{z0}$ , скалярных компонент поля  $\mathbf{N}$  (в общем случае) – не одинаковы и не одинаковы также их начальные фазы  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ .

Тогда, согласно (6.49'''), гармонически меняющееся векторное поле это, в общем случае, сумма трёх взаимно ортогональных

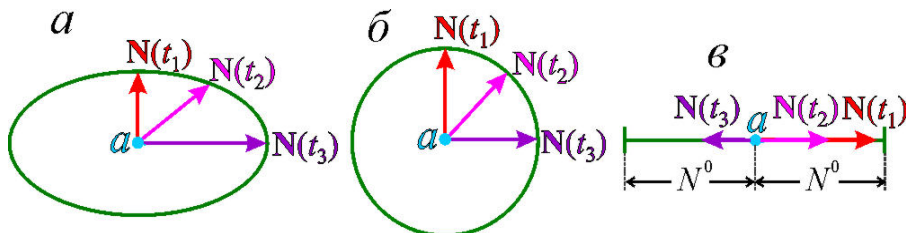


Рис. 6.10.

Эллиптическая (а), круговая (б) и линейная (в) поляризация векторного гармонически меняющегося поля  $\mathbf{N}$



не синхронно меняющихся векторов. Можно доказать ([Светов, 1973]) что если (при соответствующем выборе системы ортогональных координат) один из этих трёх векторов равен нулю, гармонически меняющееся векторное поле поляризовано эллиптически (рис. 6.10, а). То есть с течением времени (в данной точке  $a$ ) конец вектора  $\mathbf{N}$  будет перемещаться по такой линии, как эллипс. В частных случаях гармонически меняющееся векторное поле может иметь круговую поляризацию ("вращающееся поле") – рис. 6.10, б или линейную поляризацию – рис. 6.10, в. При линейной поляризации и соответствующем выборе системы ортогональных координат две из трёх компонент вектора  $\mathbf{N}$  равны нулю.

Перейдём к комплексному представлению векторного поля  $\mathbf{N}=\sum\mathbf{N}_k=\sum\mathbf{1}_k\cdot N_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) с компонентами  $N_k$ , меняющимися во времени гармонически:  $N_k=N_{k0}\cdot\cos(\omega t+\varphi_k)$ . В соответствии с (6.48) – (6.49')

$$\left. \begin{aligned} N_k &= \operatorname{Re} \check{N}_k, \quad \check{N}_k = N_{k0} \cdot \exp[-i \cdot (\omega t + \varphi_k)] = \check{N}_{k0} \cdot \exp(-i \cdot \omega t), \\ \check{N}_{k0} &= N_{k0} \cdot \exp(-i \cdot \varphi_k), \end{aligned} \right\} (6.50)$$

где  $N_{k0}$ ,  $\varphi_k$ ,  $\check{N}_{k0}$  – соответственно амплитуда, начальная фаза и комплексная амплитуда компоненты  $N_k$ .

Векторы  $\check{\mathbf{N}}_k=\mathbf{1}_k\cdot\check{N}_k$  и  $\check{\mathbf{N}}_{k0}=\mathbf{1}_k\cdot\check{N}_{k0}$  – комплексные:

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{N}}_k &= \operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_k + i \cdot \operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_k = \mathbf{1}_k \cdot N_{k0} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_k) - i \cdot \sin(\omega t + \varphi_k)], \\ \check{\mathbf{N}}_{k0} &= \operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_{k0} + i \cdot \operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_{k0} = \mathbf{1}_k \cdot N_{k0} \cdot (\cos \varphi_k - i \cdot \sin \varphi_k), \end{aligned} \right\} (6.50')$$

где  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_k=\mathbf{N}_k$ ,  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_k$ ,  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_{k0}$ ,  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_{k0}$  – действительные (вещественные) векторы по координатным направлениям  $l_k$ . Из них  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_{k0}$ ,  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_{k0}$  – постоянные (во времени) векторы, а  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_k$ ,  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_k$  – векторы, меняющиеся во времени. Их концы совершают гармонические колебания вдоль прямой, касательной к координатной линии  $l_k$  в точке наблюдения  $a$ .

Согласно (6.50), (6.50')

$$\mathbf{N}=\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}=\sum \operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_k, \quad \check{\mathbf{N}}=\sum \check{\mathbf{N}}_k=\sum \mathbf{1}_k \cdot \check{N}_k \quad (k=1, 2, 3). \quad (6.50'')$$

Итак,

$$\check{\mathbf{N}}(a, t)=\check{\mathbf{N}}_0(a)\cdot\exp(-i \omega t), \quad \check{\mathbf{N}}_0(a)=\sum \mathbf{1}_k \cdot \check{N}_{k0} \cdot \exp(-i \varphi_k) \quad (k=1, 2, 3). \quad (6.51)$$

При сравнении (6.51)<sub>1</sub> с (6.49') видим, что (при применении комплексной записи) векторное гармонически меняющееся поле можем представить в той же "форме", что скалярное поле.

Векторы,  $\check{\mathbf{N}}$  и  $\check{\mathbf{N}}_0$  – комплексные:

$$\check{\mathbf{N}}=\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}+i\cdot\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}, \quad \check{\mathbf{N}}_0=\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_0+i\cdot\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_0, \quad (6.51')$$

где  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}=\mathbf{N}$ , а  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}$ ,  $\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_0$ ,  $\operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_0$  – действительные векторы, причём

$$\operatorname{Re} \check{\mathbf{N}}_0=\sum \mathbf{1}_k \cdot N_{k0} \cdot \cos \varphi_k, \quad \operatorname{Im} \check{\mathbf{N}}_0=-\sum \mathbf{1}_k \cdot N_{k0} \cdot \sin \varphi_k. \quad (6.52)$$

Зависимость поля  $\mathbf{N}$  от точки  $a$  может быть выражена через комплексный вектор  $\check{\mathbf{N}}_0$  (вектор с комплексными скалярными компонентами). Действительно, согласно (6.50''), (6.51), (6.52)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} = \mathbf{Re} \check{\mathbf{N}} = \sum_1^3 \mathbf{1}_k \cdot N_{k0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_k) = \mathbf{Re} \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \cos(\omega t) - \\ - \mathbf{Im} \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \sin(\omega t) = \mathbf{Re} \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{Im} \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \cos(\omega t + \pi/2). \end{aligned} \right\} \quad (6.52')$$

Если  $\text{tg } \varphi_1 = \text{tg } \varphi_2 = \text{tg } \varphi_3$ , то согласно (6.52) векторы  $\mathbf{Re} \check{\mathbf{N}}_0$  и  $\mathbf{Im} \check{\mathbf{N}}_0$  коллинеарны и, следовательно, вектор  $\mathbf{N}$  *поляризован линейно*. Полагая в этом случае  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_N$  (разность, равную  $\pi$ , между углами  $\varphi_k$  можно устранить изменением направлений положительного отсчета соответствующих координат  $\xi_k$ ), имеем

$$\check{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{N}^0 \cdot \exp(-i \cdot \varphi_N), \quad \mathbf{Re} \check{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{N}^0 \cdot \cos \varphi_N, \quad \mathbf{Im} \check{\mathbf{N}}_0 = -\mathbf{N}^0 \cdot \sin \varphi_N, \quad \mathbf{N}^0 = \sum \mathbf{1}_k \cdot N_{k0}, \quad (6.53)$$

$$\check{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^0 \cdot \exp[-i \cdot (\omega t + \varphi_N)], \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}^0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_N), \quad (6.53')$$

где  $\mathbf{N}^0$  – вещественный вектор. Конец вектора  $\mathbf{N}$  перемещается по прямой (на которой лежит вектор  $\mathbf{N}^0$ ) и описывает её отрезок с длиной  $2N^0$  и с центром в начале вектора  $\mathbf{N}^0$  (в точке наблюдения  $a$ , см. **рис. 6.10, в**).

Полагая в дальнейшем

$$\check{\beta} = I, e, \delta, U, N_k, \dots, \quad \mathbf{Re} \check{\mathbf{N}} = \mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \dots,$$

будем пользоваться формулами дифференцирования, соответствующими выражениям (6.49'), (6.51)<sub>1</sub>. В частности, при  $\check{\mathbf{N}} = \check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)$  производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial t} = -i\omega \cdot \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \exp(-i\omega t) = -i\omega \cdot \check{\mathbf{N}}, \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{N}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \exp(-i\omega t) = -\omega^2 \cdot \check{\mathbf{N}}, \\ \text{rot } \check{\mathbf{N}} = \text{rot } \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \exp(-i\omega t), \quad \text{div } \check{\mathbf{N}} = \text{div } \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \exp(-i\omega t), \quad \nabla^2 \check{\mathbf{N}} = \nabla^2 \check{\mathbf{N}}_0 \cdot \exp(-i\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

#### IV. Система уравнений поля. Уравнения Гельмгольца

Подставив выражения вида (6.49'), (6.51)<sub>1</sub> в уравнения (6.12), (6.13) и взяв производные по времени, получим систему уравнений гармонически меняющегося электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. rot } \check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{j}}_{\text{плн}} = \gamma \cdot \check{\mathbf{E}} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}, \quad \text{II. rot } \check{\mathbf{E}} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \check{\mathbf{H}}, \\ \text{III. div } \check{\mathbf{B}} = 0, \quad \text{IV. div } \check{\mathbf{D}} = \check{\delta}_{\text{свб}}, \quad \text{V. div } \check{\mathbf{E}} = \check{\delta}_{\text{плн}} / \varepsilon_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

где в соответствии с (6.4), (6.42''),  $\check{\mathbf{j}}_{\text{см}} = \partial \check{\mathbf{D}} / \partial t = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \check{\mathbf{E}}$ ,  $\check{\mathbf{j}}^{\text{стр}} = \gamma \cdot \check{\mathbf{E}}^{\text{стр}}$ .

Из первого уравнения (6.55)<sub>1</sub> этой системы для непроводящей среды получаем согласно (6.22)<sub>1</sub>

$$\text{rot } \check{\mathbf{H}} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \check{\mathbf{E}}, \quad (6.55')$$

а для квазистационарного поля – уравнение (6.33)<sub>1</sub> с заменой  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{j}$  на  $\check{\mathbf{H}}$  и

$\check{\mathbf{j}} = \check{\gamma} \cdot \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}$  соответственно, т. е. уравнение

$$\text{rot } \check{\mathbf{H}} = \check{\gamma} \cdot \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}. \quad (6.55'')$$

Для области  $V$ , в которой  $\check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}=0$ , уравнение (6.55)<sub>I</sub> принимает вид

$$\text{rot } \check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{j}}_{\text{пр}} + \check{\mathbf{j}}_{\text{см}} = (\check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \check{\mathbf{E}} = \check{\gamma}' \cdot \check{\mathbf{E}} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon'_a \cdot \check{\mathbf{E}}, \quad (6.55''')$$

где

$$\check{\gamma}' = \check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a, \quad \varepsilon'_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon', \quad \varepsilon' = \varepsilon \cdot [1 + (i \cdot \gamma / \omega \cdot \varepsilon_a)], \quad (6.56)$$

$\check{\gamma}'$  – комплексная удельная электропроводность,  $\varepsilon'$  – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Сравнивая (6.55''') с (6.55'), видим, что влияние, проводимости среды на электромагнитное поле можно учесть заменой параметра  $\varepsilon$  комплексным параметром  $\varepsilon'$ . При сравнении (6.55''') с (6.33)<sub>I</sub>, (6.55'') видим, что пользуясь выражениями, полученными для квазистационарного гармонически меняющегося ЭМ поля, можно учесть влияние диэлектрической проницаемости, заменив удельную электропроводность  $\gamma$  комплексным параметром среды  $\gamma'$ .

Так как  $\text{div rot } \check{\mathbf{H}} \equiv 0$  из (6.55)<sub>I</sub> получаем уравнения

$$\text{div} \left( \check{\mathbf{j}}_{\text{плн}} \right) = \text{div} \left[ (\check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}} \right] = \text{div} \left( \check{\gamma}' \cdot \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}} \right) = 0, \quad \text{div} \left( \check{\gamma}' \cdot \check{\mathbf{E}} \right) = 0, \quad (6.56')$$

второе из которых справедливо там, где  $\text{div } \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}=0$ . Из (6.56')<sub>I</sub> следует, что в электрически однородной среде (при  $\nabla \gamma=0$ ,  $\nabla \varepsilon=0$ )

$\text{div } \check{\mathbf{E}} = -(1/(\check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a)) \cdot \text{div } \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}$ . Но согласно (6.55)<sub>V</sub>  $\text{div } \check{\mathbf{E}} = \check{\delta}_{\text{плн}}/\varepsilon_0$ . Следовательно, в электрически однородной среде объёмная плотность полных электрических зарядов

$$\check{\delta}_{\text{плн}} = -(\varepsilon_0/(\check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a)) \cdot \text{div } \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}} = -(\varepsilon_0/\check{\gamma}') \cdot \text{div } \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}. \quad (6.56'')$$

Интегрируя левую и правую части этого равенства по области пространства  $V$  и пользуясь теоремой Гаусса – Остроградского (1.30), получаем интегральную форму уравнения (6.56''):

$$\int_V \check{\delta}_{\text{плн}} dV = \check{e}_{V_{\text{плн}}} = -(\varepsilon_0/(\check{\gamma} - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a)) \cdot \oint_{S[V]} \left( \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}} d\mathbf{S} \right). \quad (6.56''')$$

Уравнение (6.56')<sub>2</sub> математически идентично уравнению (4.17)<sub>I</sub> (при  $\check{\mathbf{E}}^{\text{стр}}=0$ ) для стационарного поля  $\check{\mathbf{E}}$ . Поэтому по аналогии с (4.50) для плотностей источников составляющей  $\check{\mathbf{E}}^{\text{Кул}}$  гармонически меняющегося поля  $\check{\mathbf{E}}$  – объёмных и поверхностных зарядов, индуцированных в местах нарушения однородности среды по  $\check{\gamma}'$ , при  $\text{div } \check{\mathbf{j}}^{\text{стр}}=0$  получаем выражения:

$$\check{\delta}_{\text{плн}} = -\frac{\varepsilon_0}{\check{\gamma}'} \cdot (\check{\mathbf{E}} \nabla \check{\gamma}'), \quad \check{\sigma}_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\check{\gamma}'_1 - \check{\gamma}'_2}{\check{\gamma}'_{\text{ср}}} \cdot \check{E}_n^{\text{ср}}. \quad (6.56''')$$

Согласно (6.55''') компонента вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{j}}_{\text{см}}$  по некоторому направлению  $l$ :  $\overset{\vee}{j}_l^{\text{см}} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \overset{\vee}{E}_l = \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \overset{\vee}{E}_l \cdot \exp(-i \cdot \pi/2)$ . В соответствии с (6.50)  $\overset{\vee}{E}_l = E_{l0} \cdot \exp(-i \cdot \varphi_{E_l}) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$ ,  $\overset{\vee}{j}_{l\text{пр}} = \gamma \cdot E_{l0} \cdot \exp(-i \cdot \varphi_{E_l}) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$ ,  $\overset{\vee}{j}_l^{\text{см}} = \omega \cdot \varepsilon_a \cdot E_{l0} \cdot \exp[-i \cdot (\varphi_{E_l} + \pi/2)] \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$ , т. е.  $\varphi_{j_l^{\text{см}}} = \varphi_{E_l} + \pi/2$ , где  $\varphi_{E_l}$  и  $\varphi_{j_l^{\text{см}}}$  – начальные фазы величин  $E_l$  и  $j_l^{\text{см}}$ .

Следовательно, компонента  $j_l^{\text{см}}$  опережает компоненту  $E_l$  и компоненту  $j_{l\text{пр}}$  плотности тока проводимости  $I_{\text{пр}}$  по фазе на  $\pi/2$  (рис. 6.11). Соотношение между величинами  $j_l^{\text{см}}$  и  $j_{l\text{пр}} = \gamma \cdot E_l$  можно характеризовать отношением их амплитуд:

$$\alpha = (j_{l0}^{\text{см}} / j_{l0\text{пр}}) = (\omega \cdot \varepsilon_a / \gamma) = \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \rho. \quad (6.57)$$

Величину  $(1/\alpha) = (\gamma / \omega \cdot \varepsilon_a) = \text{tg } \Delta$  называют "тангенсом угла потерь"  $\Delta$ .

Поэтому первое условие квазистационарности ( $j_{\text{см}} \ll j_{\text{пр}}$ , см. дополнение 6 в разделе IV, § 4) для области  $V$  в случае гармонически меняющегося поля принимает вид:  $\alpha \ll 1$  или  $\omega \cdot \varepsilon_a = 2\pi \cdot f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \ll \gamma$ .

Заметим, что в общем случае параметры среды  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  и, соответственно, показанные на рис. 6.11 амплитуды  $j_{l0\text{пр}} = \gamma \cdot E_{l0}$ ,  $j_{l0}^{\text{см}} = \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E_{l0}$  компонент  $j_{l\text{пр}}$ ,  $j_l^{\text{см}}$  (и отношение этих амплитуд) зависят от частоты. При высоких частотах  $f$  частотная дисперсия  $\varepsilon$  может быть, например, связана с инерционностью процессов ориентационной

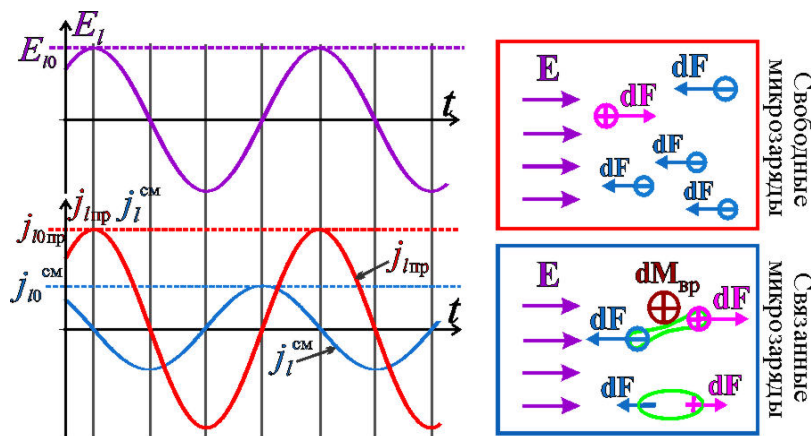


Рис. 6.11.

Зависимости от времени  $t$  в произвольной точке  $a$  компонент  $E_l$ ,  $j_{l\text{пр}}$  и  $j_l^{\text{см}}$  по любому направлению  $l$

отличающихся по фазе на  $\pi/2$  от компонент  $E_l$ , присуща также гетерогенным горным породам. Этому (применительно к уравнениям классической электродинамики) соответствуют частотные дисперсии эффективных параметров  $\varepsilon$  и  $\gamma$ . Однако в любом случае частотные дисперсии электрических параметров  $\gamma = 1/\rho$  и  $\varepsilon$  – взаимно зависимы (см., например, [Каринский и др., 1997]).

Из (6.32) в соответствии с (6.54) получаем для ЭМ поля в однородной среде при  $\mathbf{E}^{\text{суп}} = 0$  и, следовательно, при  $\delta = 0$  уравнения

$$\nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{H}} + (\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a + i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a) \cdot \overset{\vee}{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{E}} + (\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a + i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a) \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} = 0. \quad (6.58)$$

Полагая в (6.58)  $\gamma = 0$ , имеем в соответствии с (6.23)<sub>1,2</sub> для поля в

При высоких частотах  $f$  частотная дисперсия  $\varepsilon$  может быть, например, связана с инерционностью процессов ориентационной поляризации диэлектриков (см. рис. 6.11, 2.13, з, 2.17, 3.2, 4.1). Зависимость от частоты отношения амплитуд  $l$  – компонент векторов плотности суммарного тока, меняющихся синфазно с компонентами  $E_l$  поля  $\mathbf{E}$  и

однородной непроводящей среде при  $\delta_{\text{свб}}=0$  уравнения

$$\nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{H}} + \omega^2 \cdot \epsilon_a \cdot \mu_a \cdot \overset{\vee}{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{E}} + \omega^2 \cdot \epsilon_a \cdot \mu_a \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.58')$$

которые справедливы не только для векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$ , но и для (действительных) векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  гармонически меняющегося ЭМ поля.

Считая, что  $\alpha = (\omega \cdot \epsilon_a / \gamma) \ll 1$ , получаем из (6.58) для квазистационарного поля в однородной среде при  $\mathbf{E}^{\text{ср}}=0$  уравнения

$$\nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{H}} + i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \overset{\vee}{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{E}} + i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.58'')$$

соответствующие (в случае гармонически меняющегося поля) уравнениям (6.34).

Уравнения вида (6.58) – (6.58'') – *уравнения Гельмгольца*. Они не содержат производных по времени.

Согласно (6.49'), (6.51)<sub>1</sub> (6.54) временной фактор  $\exp(-i \cdot \omega t)$  входит в виде множителя во все члены уравнений (6.55) – (6.55'''), (6.58) – (6.58''). Следовательно, во всех этих уравнениях можно, *сократив множитель*

$\exp(-i \cdot \omega t)$ , заменить величины  $\overset{\vee}{\beta}$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{N}}$  амплитудными величинами  $\overset{\vee}{\beta}_0$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{N}}_0$ .

Эти величины (поля)  $\overset{\vee}{\beta}_0$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{N}}_0$  зависят не от четырёх аргументов (три пространственные координаты и время  $t$ ), а (максимум) от трёх аргументов, например – от  $x, y, z$ . Поэтому (при применении комплексной записи) теория гармонически меняющегося поля проще, чем теория других переменных полей.

Полученными для гармонически меняющегося поля данными, а также, например, рядом Фурье (см. раздел VIII) или интегралом Фурье (см. раздел IX), можно воспользоваться для применения этих данных к другим зависимостям поля от времени.

## V. Волновое число

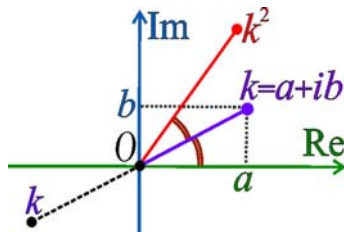
Введя обозначение

$$k^2 = \omega^2 \cdot \epsilon_a \cdot \mu_a + i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot (\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a) = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma' = \omega^2 \cdot \mu_a \cdot \epsilon'_a, \quad (6.59)$$

получаем для однородной по  $\gamma, \epsilon, \mu$  области  $V$  при  $\mathbf{j}^{\text{ср}}=0$  вместо (6.58)

$$\nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{H}} + k^2 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{E}} + k^2 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.60)$$

где  $k$  – *комплексное волновое число* (см. раздел VI). Из уравнений (6.60) следует, что влияние



**Рис. 6.12.**

Волновое число  $k$

электромагнитных параметров среды  $\gamma, \epsilon, \mu$  и частоты  $f = \omega / 2\pi$  на электромагнитное поле в значительной степени зависит от волнового числа  $k$ . Согласно (6.59) при  $\omega \geq 0$  величина  $k^2$  лежит в первом квадранте комплексной плоскости, т. е.  $\text{Re } k^2 \geq 0, \text{Im } k^2 \geq 0$  (рис. 6.12).

Введём обозначение

$$k = \sqrt{k^2} = a + i \cdot b. \quad (6.59')$$

При  $\text{Re } k^2 \geq 0$ ,  $\text{Im } k^2 \geq 0$  комплексная величина  $k$  может лежать в первом или третьем квадранте комплексной плоскости (см. [рис. 6.12](#)). Модуль  $|k| = |k^2|^{1/2}$ , а два значения аргумента:  $\arg(k) = \arctg(k^2)/2$  и  $\arg(k) = \arctg(k^2)/2 + \pi$ . Выберем первое из этих значений. При этом  $a$  и  $b$  – неотрицательные действительные величины. **Размерности  $k, a, b$ : 1/м.**

Из (6.59') получаем  $k^2 = (a + i \cdot b)^2 = (a^2 - b^2) + i \cdot 2 \cdot a \cdot b$ . Из равенства двух комплексных величин следуют равенство их действительных частей и равенство их мнимых частей. Сопоставляя последнее выражение для  $k^2$  с (6.59), получаем систему уравнений для  $a$  и  $b$ :

$$a^2 - b^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a, \quad 2 \cdot a \cdot b = \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a. \quad (6.59'')$$

При  $a \geq 0, b \geq 0$  система (6.59'') имеет решение:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_a \cdot \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + (1/\alpha^2)} + 1}, \\ b &= \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_a \cdot \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + (1/\alpha^2)} - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

где в соответствии с (6.57)  $\alpha = \omega \cdot \varepsilon_a / \gamma$ , а корни – арифметические. При  $\omega = 2\pi \cdot f = 0$  (постоянное ЭМ поле)  $a = b = 0$ , т. е. волновое число  $k = 0$ .

Действительная часть ( $a$ ) волнового числа – *ф а з о в а я п о с т о я н н а я* (коэффициент фазы), а коэффициент при мнимой части волнового числа ( $b$ ) – *к о э ф ф и ц и е н т з а т у х а н и я* (коэффициент поглощения). Физический смысл этих величин будет пояснён в разделе VI. Получим выражения для  $a, b, k^2$  в нескольких частных случаях.

**1. Вакуум** ( $\gamma = 0, \varepsilon = 1, \mu = 1, \varepsilon_a = \varepsilon_0, \mu_a = \mu_0, \alpha = \infty, 1/\alpha = 0$ ). Из вторых выражений (6.61) для  $a$  и  $b$  и из равенства (6.59) для  $k^2$  получаем:

$$a = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}, \quad b = 0, \quad k^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_0 = a^2.$$

**2. Непроводящая среда** ( $\gamma = 0, \alpha = \infty, 1/\alpha = 0$ ).

$$a = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}, \quad b = 0, \quad k^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a = a^2 \quad (6.61')$$

в соответствии с (6.58').

**3. Среда – несовершенный диэлектрик.** В такой среде  $\gamma > 0$ , но  $j_{10}^{\text{см}} \gg j_{10}^{\text{пр}}$  (см. [рис. 6.11](#)), т. е.  $\omega \cdot \varepsilon_a \gg \gamma, \alpha \gg 1, 1/\alpha \ll 1$ .

При этих условиях  $\sqrt{\sqrt{1 + 1/\alpha^2} + 1} \approx \sqrt{2}$  и, согласно второму выражению для  $a$  в (6.61),  $a \approx \omega \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}$ . Чтобы упростить выражение (6.61) для  $b$  воспользуемся степенным рядом:  $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$ . При  $|x| \ll 1$

имеем:  $(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x$ , в частности,  $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + x/2$ . Следовательно, при  $1/\alpha \ll 1$   $\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} - 1} \approx \sqrt{1 + \frac{1}{2\alpha^2}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \alpha} = \frac{\gamma}{\sqrt{2} \cdot \omega \varepsilon_a}$ . Из второго выражения (6.61) для

$b$  получаем:  $b \approx \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{2} \cdot \omega \varepsilon_a} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ . Итак, в несовершенном



диэлектрике, при  $\omega \cdot \varepsilon_a \gg \gamma$

$$a \approx \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}, \quad b \approx \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \frac{1}{2 \cdot \rho} \cdot \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (6.61'')$$

Следовательно, при  $\omega \cdot \varepsilon_a \gg \gamma$  фазовую постоянную  $a$  приближённо определяет выражение (6.61')<sub>1</sub> для непроводящей среды. Коэффициент затухания  $b$  пропорционален удельной электропроводности  $\gamma$ , испытывает влияние проницаемостей  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и не зависит от частоты  $f = \omega/2\pi$ . Следует, правда, принимать во внимание, что уменьшение частоты  $f$  может привести к тому, что не будет справедливо неравенство  $\omega \cdot \varepsilon_a \gg \gamma$ .

4. Для квазистационарного поля ( $j_{\text{ю}}^{\text{см}} \ll j_{\text{ю}}$ ,  $\omega \cdot \varepsilon_a \ll \gamma$ ), полагая в первых выражениях (6.61) для  $a$  и  $b$   $\alpha \ll 1$  и из равенства (6.59) для  $k^2$  получаем:

$$a \approx b \approx \frac{|k|}{\sqrt{2}} \approx \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu}{2 \cdot \rho}}, \quad k^2 \approx i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \quad (6.61''')$$

в соответствии с (6.58''). Т. е. величины  $a$ ,  $b$  пропорциональны  $\sqrt{f \cdot \gamma \cdot \mu}$  и, конечно, не зависят от диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ . Согласно (6.61''')<sub>2</sub> модуль  $|k^2| = \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a$ , а аргумент  $\arg(k^2) = \pi/2$ . Соответственно для волнового числа  $k$  имеем:  $|k| = (\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a)^{1/2}$ ,  $\arg(k) = \pi/4$  (см. рис. 6.12).

## VI. Плоская гармоническая волна в однородной среде

Для выяснения характера решений уравнений (6.58) – (6.58''), (6.60) применим их к введенному в разделе II, § 3 полю  $\eta(z, t) = E_x, H_y, \dots$ . Полагая

$$\eta(z, t) = \overset{\vee}{\text{Re}} \overset{\vee}{\eta}(z, t), \quad \overset{\vee}{\eta}(z, t) = \overset{\vee}{\eta}_0(z) \cdot \exp(-i \cdot \omega t),$$

получаем согласно (6.36), (6.60) для  $\overset{\vee}{\eta}$  уравнение

$$\frac{\partial^2 \overset{\vee}{\eta}}{\partial z^2} + k^2 \cdot \overset{\vee}{\eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \overset{\vee}{\eta}}{\partial z^2} + \omega^2 \cdot \mu_a \cdot \varepsilon'_a \cdot \overset{\vee}{\eta} = 0, \quad (6.62)$$

где в соответствии с (6.56)  $\varepsilon'_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'$ , а  $\varepsilon' = \varepsilon \cdot [1 + (i \cdot \gamma / \omega \cdot \varepsilon_a)]$  – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Одно из двух решений уравнения (6.62):

$$\overset{\vee}{\eta}(z, t) = \overset{\vee}{\eta}_0(0, 0) \cdot \exp[-i \cdot (\omega t - k \cdot z)] = \overset{\vee}{\eta}_0(0, 0) \cdot \exp[-i \cdot (\omega t - a \cdot z)] \cdot \exp(-b \cdot z).$$

Во втором решении вместо  $-k \cdot z$ ,  $-a \cdot z$ ,  $-b \cdot z$  имеем соответственно  $+k \cdot z$ ,  $+a \cdot z$ ,  $+b \cdot z$ .

В соответствии с формулой Эйлера (6.47'') и (6.48) для действительной величины  $\eta(z, t)$  получаем

$$\eta(z, t) = \eta_0(0) \cdot \exp(-b \cdot z) \cdot \cos[\varphi(0) + \omega t - a \cdot z]. \quad (6.63)$$

Уравнению (6.62) удовлетворяет также комплексная амплитуда

$$\overset{\vee}{\eta}_0(z) = \overset{\vee}{\eta}_0(0) \cdot \exp(i \cdot k \cdot z) = \overset{\vee}{\eta}_0(0) \cdot \exp(i \cdot a \cdot z) \cdot \exp(-b \cdot z), \quad (6.63')$$

где в соответствии с (6.49)

$$\checkmark \eta_0(0) = \eta_0(0) \cdot \exp[-i \cdot \varphi(0)], \quad \checkmark \eta_0(z) = \eta_0(z) \cdot \exp[-i \cdot \varphi(z)], \quad (6.63'')$$

а  $\eta_0(z)$ ,  $\eta_0(0)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\varphi(0)$  – (действительные) амплитуды и начальные фазы поля  $\eta(z, t)$  в плоскости с произвольным значением координаты  $z$  и в плоскости  $z=0$ .

Согласно (6.63)

$$\text{при } \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{a} \quad \eta(z + \Delta z, t + \Delta t) = \eta(z, t) \cdot \exp(-b \cdot z). \quad (6.64)$$

Следовательно, (6.63) является выражением для плоской гармонической волны, распространяющейся по направлению  $Z$  с *фазовой скоростью*  $v_{\text{фаз}} = \Delta z / \Delta t = \omega / a$  и затухающей экспоненциально с показателем  $-b \cdot z$  (рис. 6.13).

*Фазовая скорость – скорость перемещения синфазной поверхности.*

За период  $T$  поле распространяется на длину волны  $\lambda = v_{\text{фаз}} \cdot T$  т. е. приращения  $\Delta z = \lambda$ , и  $\Delta t = T$  удовлетворяют условию  $(\Delta z / \Delta t) = (\omega / a) = v_{\text{фаз}}$ . Таким образом, в соответствии с (6.64)

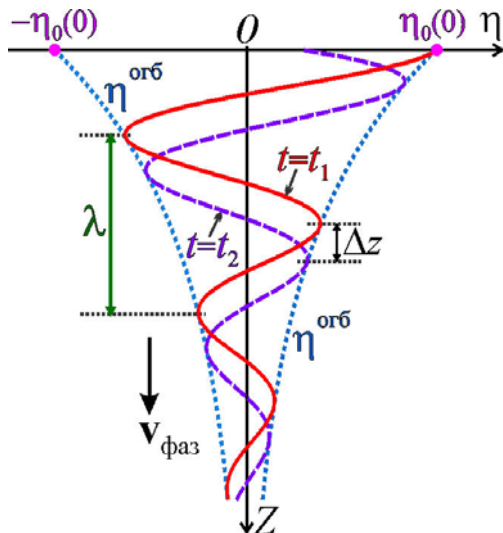
$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi \cdot f}{a}, \quad \lambda = v_{\text{фаз}} \cdot T = \frac{\omega \cdot T}{a} = \frac{2\pi}{a}. \quad (6.65)$$

Согласно (6.65)<sub>1</sub>, (6.61)<sub>1</sub> скорость  $v_{\text{фаз}}$  в общем случае зависит от частоты  $f$  – *частотная дисперсия*.

Подстановкой в (6.63) легко убедиться, что

$$\eta(z, t+T) = \eta(z, t), \quad (6.64')$$

$$\eta(z+\lambda, t) = \eta(z, t) \cdot \exp(-b \cdot \lambda). \quad (6.64'')$$



**Рис. 6.13.**

Распределение поля  $\eta$  по оси  $Z$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + \Delta t$

Первое из этих равенств выражает временную периодичность поля  $\eta(z, t)$  в плоскости  $z = \text{const}$ , а второе – мгновенное распределение этого поля в пространстве (по любой прямой, параллельной оси  $Z$ ) в момент  $t$ . Волнообразные кривые, изображающие это распределение для моментов  $t = t_1$  и  $t = t_2 = t_1 + \Delta t$ , показаны на рис. 6.13.

Придавая  $t$  всевозможные значения, получаем (в плоскости  $z, \eta$ ) семейство кривых  $\eta(z, t)$  с параметром  $t$ . Построим "огнивающую" этого семейства, для чего исключим из уравнения (6.63) параметр семейства  $t$ , пользуясь условием  $(\partial \eta / \partial t) = 0$  (обращение в нуль производной по параметру  $t$ ). Из этого условия имеем

$$\sin[\varphi(0) + \omega \cdot t - a \cdot z] = 0, \quad \text{т. е.} \quad \cos[\varphi(0) + \omega \cdot t - a \cdot z] = \pm 1.$$

Таким образом, получаем уравнение "огнивающей":

$$\eta^{\text{огб}} = \pm \eta_0(0) \cdot \exp(-b \cdot z).$$

Это – уравнение показанной пунктиром на **рис. 6.13** пары кривых, являющихся геометрическим местом экстремальных точек всех кривых семейства.

При любых двух значениях  $z_1$  и  $z_2$  координаты  $z$  имеем согласно (6.63') – (6.63'') для отношения амплитуд и разности фаз выражения:

$$\frac{\eta_0(z_2)}{\eta_0(z_1)} = \exp[-b \cdot (z_2 - z_1)], \quad \varphi(z_1) - \varphi(z_2) = a \cdot (z_2 - z_1). \quad (6.66)$$

Формулы (6.63) – (6.66) позволяют выяснить физический смысл величин  $a$  и  $b$  в (6.59).

Фазовая постоянная  $a$  в соответствии с (6.66)<sub>2</sub>, (6.65)<sub>2</sub> определяет "интенсивность" изменения фазы  $\varphi$  с расстоянием (по направлению распространения волны) и длину  $\lambda$  плоской гармонической волны. При  $z_2 - z_1 = \lambda$  разность фаз  $\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = 2\pi$ , т. е.  $a \cdot \lambda = 2\pi$  или  $\lambda = 2\pi/a$ . Чем больше величина  $a$ , тем короче длина волны  $\lambda$ .

Коэффициент затухания  $b$  в соответствии с (6.63), (6.64), (6.64'') определяет "быстроту" затухания поля с расстоянием (по направлению распространения волны). Согласно (6.66) затухание можно охарактеризовать интенсивностью уменьшения амплитуды плоской гармонической волны по направлению её распространения. Чем больше величина  $b$ , тем быстрее убывает по этому направлению амплитуда поля. Полагая в (6.66)<sub>1</sub> расстояние  $z_2 - z_1$  либо равным длине волны  $\lambda$ , либо равным  $1/b$ , получаем выражения

$$d_\lambda = \exp[2\pi \cdot (b/a)], \quad \delta = 1/b. \quad (6.66')$$

Первая формула характеризует уменьшение амплитуды поля на интервале, равном длине волны  $\lambda$ , а вторая определяет *глубину проникновения* поля ("скин – слой")  $\delta$ . При  $z_2 - z_1 = \delta = 1/b$  правая часть (6.66)<sub>1</sub> равна  $\exp(-1)$ , т. е. на отрезке  $z_2 - z_1 = \delta$  амплитуда поля уменьшается в  $e \approx 2.718$  раз. Уменьшению амплитуды в  $e$  раз дано название *непер*.

Рассмотрим на примере плоской ЭМ волны некоторые особенности, присущие гармонически меняющемуся электромагнитному полю, в трёх случаях: 1) ЭМ поле в изоляторе ( $\gamma=0$ ), 2) ЭМ поле в несовершенном диэлектрике ( $\alpha \gg 1$ ) и 3) квазистационарное ЭМ поле ( $\alpha \ll 1$ ).

**1. Изолятор ( $\gamma=0$ ).** В этом случае согласно (6.61'),  $k = a = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ ,  $b=0$  и волновое число  $k = a + i \cdot b = a$  является действительной величиной. Следовательно, согласно (6.65)<sub>2</sub> при  $\gamma=0$   $k = \lambda/2\pi$ , т. е. число волн, укладываемых на отрезке  $2\pi$  метров, (численно) равно  $k$ . Возможно поэтому (не безразмерный, а имеющий размерность 1/м) параметр  $k$  был назван "волновое число".

Согласно (6.61') вместо (6.64), (6.65)<sub>1</sub>, (6.65)<sub>2</sub> получаем (6.25'), (6.26), (6.27), а вместо (6.66)<sub>1</sub>, (6.66')<sub>1</sub>, (6.66')<sub>2</sub> имеем

$$\eta_0(z) = \text{const}, \quad d_\lambda = 0, \quad \delta = \infty, \quad (6.67)$$

$$v_{\text{фаз}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = v, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{v}{f}. \quad (6.67')$$

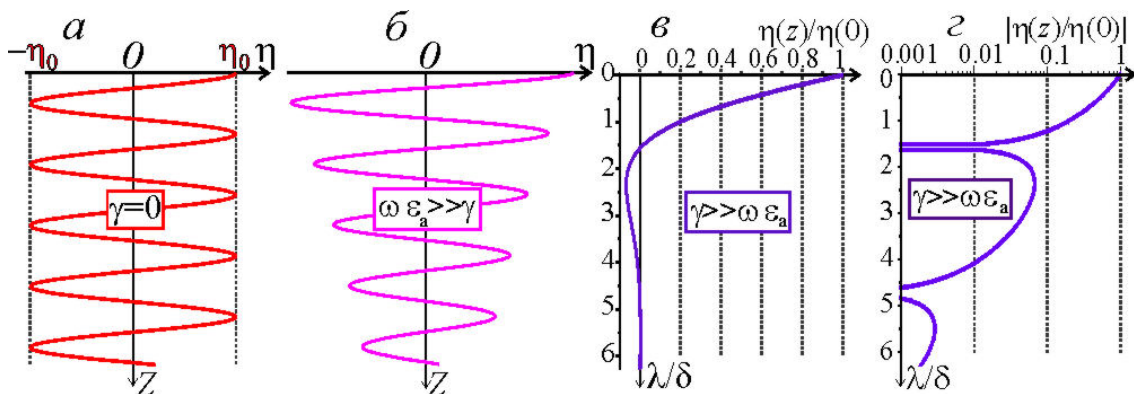
Здесь, в соответствии с (6.26'),  $v=c/\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$  – скорость распространения ЭМ поля в изоляторе,  $c=1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$  – электродинамическая постоянная. Из (6.67), (6.67'), (6.26) следует, что в непроводящей среде электромагнитная волна не затухает (рис. 6.14, а) – глубина проникновения  $\delta$  бесконечно велика, а скорость  $v_{\text{фаз}}=v$  и не зависит от частоты, т. е. *нет частотной дисперсии*.

2. "Несовершенный диэлектрик" ( $j_{10}^{\text{см}} \gg j_{10\text{пр}}$ ,  $\alpha \gg 1$ ). Для этого случая величины  $a$  и  $b$  определяют приближённые равенства (6.61"). В соответствии с (6.65), (6.66')<sub>2</sub> получаем выражения

$$v_{\text{фаз}} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = v, \quad \lambda \approx \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{v}{f}, \quad \delta \approx \frac{2}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} = 2 \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}, \quad (6.67'')$$

согласно двум первым из которых для характеристик  $v_{\text{фаз}}$  и  $\lambda$  плоской гармонической ЭМ волны при  $j_{10}^{\text{см}} \gg j_{10\text{пр}}$  (приближённо) справедливы приведенные в (6.67')<sub>1,2</sub> выражения для изолятора, но величина  $\delta$  ограничена. Из (6.67'')<sub>3</sub> следует, что в несовершенном диэлектрике глубина проникновения  $\delta$  зависит, в основном, от удельного электрического сопротивления  $\rho$  ( $\delta$  пропорциональна  $\rho$ ), а также от проницаемостей среды и не зависит от частоты  $f=\omega/(2\pi)$ .

Оценим отношение  $\delta/\lambda$ . Из (6.67')<sub>2,3</sub> следует, что  $\frac{\delta}{\lambda} \approx \frac{2}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \cdot \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega \cdot \varepsilon_a}{\gamma} = \alpha/\pi \gg 1$  при  $\alpha \gg 1$ . То есть при тех частотах и электрических параметрах среды, когда последняя является несовершенным диэлектриком, расстояние  $\delta$ , на котором амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз – много больше, чем длина волны  $\lambda$  (рис. 6.14, б).



**Рис. 6.14.**

Плоская гармоническая ЭМ волна при  $t=\text{const}$ .

Изолятор ( $\gamma=0$ ) или вакуум ( $\gamma=0, \varepsilon=1, \mu=1$ ) ( $a$ );  $\alpha=(\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \rho) \gg 1$  ( $\delta$ );

$\alpha=(\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \rho) \ll 1$  ( $\delta, \varepsilon$ )

3. Квазистационарное гармонически меняющееся поле ( $j_{10}^{\text{см}} \ll j_{10}$ ,  $\alpha \ll 1$ ).

При этих условиях согласно (6.61''') вместо (6.65)<sub>1</sub>, (6.65)<sub>2</sub>, (6.66)<sub>1</sub>, (6.66')<sub>1,2</sub> получаем

$$v_{\text{фаз}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\gamma \cdot \mu_a}}, \quad \lambda \approx \frac{2\sqrt{2} \cdot \pi}{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}, \quad \frac{\eta_0(z_2)}{\eta_0(z_1)} = \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}{2}} \cdot (z_2 - z_1)\right] \quad (6.68)$$

и при  $a \approx b$  глубина проникновения

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot \mu_a}} \approx \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (6.68')$$

Из (6.68), (6.68') следует, что при  $\alpha \ll 1$  скорость  $v_{\text{фаз}}$  зависит от частоты  $f = \omega / (2\pi)$  (частотная дисперсия). Глубина проникновения  $\delta$  растёт с уменьшением частоты и с увеличением  $\rho$ . Приближённое равенство  $\lambda \approx 2\pi \cdot \delta$  означает, что на интервале, равном длине  $\lambda$  плоской волны, "укладывается"  $2\pi$  глубин проникновения  $\delta$ , то есть на отрезке  $\lambda$  (даже у не имеющей геометрического расхождения плоской волны) амплитуда колебаний уменьшается в  $\exp(2\pi) \approx 535$  раз.

На **рис. 6.14, в** приведен пример зависимости компоненты  $\eta(z) = E_x, H_y, \dots$ , нормированной на  $\eta(0)$ , от отношения  $(\lambda/\delta)$  при  $t = \text{const}$  для квазистационарного ЭМ поля. На **рис. 6.14, з** показана аналогичная зависимость для абсолютной величины  $|\eta(z)/\eta(0)|$  отношения  $\eta(z)/\eta(0)$  при логарифмическом горизонтальном масштабе.

## VII. Дополнительные сведения о плоской гармонической волне

Здесь и в разделе II, § 3 для однородной области  $V$ , в которой  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$  и  $\delta_{\text{свб}} = 0$ ) плоское электромагнитное поле мы представляли полем  $\eta(z, t)$  скалярных декартовых компонент  $E_x, H_y = \eta$ , имея в виду, что  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_x \cdot E_x(z, t)$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_y \cdot H_y(z, t)$ . То есть мы допускали, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно ортогональны и что они лежат в плоскостях  $z = \text{const}$ , в пределах каждой из которых их значения одинаковы в любой момент времени  $t$ .

Покажем на примере гармонически меняющегося поля, что эти два допущения, принятые выше произвольно, фактически следуют из уравнений Максвелла. Допущение о взаимной ортогональности векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  выполняется при некоторых дополнительных условиях, о которых будет сказано в конце этого раздела. Для этого будем теперь ограничивать характер электромагнитного поля *только тем*, что все декартовы компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от декартовых координат  $x$  и  $y$ , т. е.  $E_x = E_x(z, t)$ ,  $E_y = E_y(z, t)$ ,  $E_z = E_z(z, t)$ ,  $H_x = H_x(z, t), \dots$ . При этом в соответствии с (6.51)

$$\check{\mathbf{H}}(z, t) = \check{\mathbf{H}}_0(z) \cdot \exp[-i \cdot \omega t], \quad \check{\mathbf{E}}(z, t) = \check{\mathbf{E}}_0(z) \cdot \exp[-i \cdot \omega t]. \quad (6.69)$$

Подставляя выражения (6.69) в (6.55'''), (6.55)<sub>II</sub> и пользуясь формулой (1.28) согласно которой  $\text{rot } \mathbf{M} = [\nabla \mathbf{M}]$ , получаем уравнения:

$$\text{I.} \quad \left[ \mathbf{1}_z \quad \frac{\partial \check{\mathbf{H}}}{\partial z} \right] = (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \check{\mathbf{E}}, \quad \text{II.} \quad \left[ \mathbf{1}_z \quad \frac{\partial \check{\mathbf{E}}}{\partial z} \right] = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \check{\mathbf{H}}. \quad (6.69')$$

Из (6.69')<sub>I</sub> и (6.69')<sub>II</sub> следует, что (соответственно)  $\check{E}_z=0$  и  $\check{H}_z=0$ , а тогда согласно (6.50)<sub>I</sub> и действительные величины  $E_z=0$  и  $H_z=0$ , т. е. каждый из векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ортогонален направлению (оси  $Z$ ) распространения электромагнитной волны. Таким образом, электромагнитная волна – поперечная.

Допустим теперь, что поле  $\mathbf{E}$  линейно поляризовано (см. раздел III и рис. 6.10, в) и выберем направление оси  $X$  так, чтобы в (6.69')<sub>II</sub> в соответствии с (6.51)<sub>I</sub>, (6.63')

$$\check{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_x \cdot \check{E}_x = \mathbf{1}_x \cdot \check{E}_{x0}(0) \cdot \exp(i k z) \cdot \exp(-i \omega t). \quad (6.70)$$

Подставляя  $\frac{\partial \check{\mathbf{E}}}{\partial z} = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial \check{E}_x}{\partial z} = \mathbf{1}_x \cdot i \cdot k \cdot \check{E}_x$  в левую часть (6.69')<sub>II</sub>, получаем.

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{H}} &= \frac{k}{\omega \cdot \mu_a} [\mathbf{1}_z \mathbf{1}_x] \cdot \check{E}_x = \mathbf{1}_y \cdot \frac{k}{\omega \cdot \mu_a} \cdot \check{E}_x, \\ \text{т. е. } \check{\mathbf{H}} &= \mathbf{1}_y \cdot \check{H}_y, \quad \check{H}_y = \frac{k}{\omega \cdot \mu_a} \cdot \check{E}_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.70')$$

Согласно (6.70), (6.70') при  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_x \cdot E_x$  имеем  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_y \cdot H_y$ , т. е. (при линейной поляризации плоской волны) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно ортогональны. В соответствии с (6.21) такому ЭМ полю соответствует вектор плотности (скорости) потока электромагнитной энергии

$\mathbf{Y} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = [\mathbf{1}_x \cdot E_x \mathbf{1}_y \cdot H_y] = [\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y] \cdot E_x \cdot H_y = \mathbf{1}_z \cdot E_x \cdot H_y = \mathbf{1}_z \cdot Y_z = \mathbf{Y}_z$ , (6.70'')  
направление которого коллинеарно орту  $\mathbf{1}_z$ . В те моменты времени, когда знаки скалярных компонент  $E_x$  и  $H_y$  одинаковы, вектор  $\mathbf{Y} \parallel \mathbf{1}_z$ , а когда  $E_x$  и  $H_y$  имеют разные знаки  $\mathbf{Y} \uparrow \downarrow \mathbf{1}_z$ .

Из (6.70') следует, что  $\check{E}_x = Z \cdot \check{H}_y$  или

$$Z = \frac{\check{E}_x}{\check{H}_y} = \frac{\check{E}_{x0} \cdot \exp(-i \omega t)}{\check{H}_{y0} \cdot \exp(-i \omega t)} = \frac{E_{x0} \cdot \exp(-i \varphi_{E_x})}{H_{y0} \cdot \exp(-i \varphi_{H_y})} = \frac{E_{x0}}{H_{y0}} \cdot \exp[-i(\varphi_{E_x} - \varphi_{H_y})], \quad (6.70''')$$

где (имеющую размерность ((В/м)/(А/м))=Ом) величину  $Z$  определяет выражение

$$Z = \frac{\omega \cdot \mu_a}{k} = \frac{\omega \cdot \mu_a}{\sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a)}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\omega \cdot \varepsilon_a + i \cdot \gamma}}. \quad (6.71)$$

Параметр  $Z$  называют *импедансом* (или *волновым сопротивлением*), его полностью определяют частота  $f = \omega / (2\pi)$  и электромагнитные параметры среды  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ . В общем случае  $Z$  – величина комплексная. Это связано с тем, что компоненты  $E_x$  и  $H_y$  в точке  $a$  могут иметь разные начальные фазы, т. е. могут меняться во времени не синхронно. Согласно (6.70''') модуль  $|Z| = (E_{x0}/H_{y0})$ , а (взятый с обратным знаком) аргумент  $-\arg(Z) = \varphi_{E_x} - \varphi_{H_y}$ .

В случаях, когда среда – изолятор или когда поле можно считать



квазистационарным, выражение для  $Z$  можно упростить:

$$\text{при } \gamma=0 \quad Z = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}, \quad (6.71')$$

$$\text{при } 2\pi \cdot f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon = \omega \cdot \varepsilon_a \ll \gamma \quad Z \approx \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{i \cdot \gamma}} = \sqrt{\omega \cdot \rho \cdot \mu_a} \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.71'')$$

Из (6.71') следует, что при  $\gamma=0$  импеданс  $Z$  – положительная действительная величина, действительные компоненты  $E_x=Z \cdot H_y$  и  $H_y$  меняются со временем синхронно, а векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и направление распространения электромагнитной волны в любой момент времени образуют правовинтовую систему. Для рассматриваемой здесь плоской ЭМ волны из (6.70') следует, что при  $\gamma=0$  в любой момент времени скалярная компонента  $V_z \geq 0$ , направление вектора  $\mathbf{U}$  не меняется.

Так как согласно (6.71) в комплексной форме  $\overset{\vee}{E}_x = Z \cdot \overset{\vee}{H}_y$ , то из (6.70'''), (6.71''), в частности, следует, что в случае квазистационарного ЭМ поля компонента  $E_x$  опережает по фазе  $H_y$  на  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ). В этом случае согласно (6.70''), (6.71'') большую часть периода  $T$  компонента  $V_z > 0$ , но за отрезок времени  $t=T$  эта компонента четыре раза меняет знак, и в моменты изменения знака  $V_z$  вектор плотности потока ЭМ энергии  $\mathbf{U}$  меняет направление на противоположное.

Сказанное выше о взаимной ортогональности векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  относилось к линейно-поляризованной плоской волне. Для этой же волны было введено понятие импеданса  $Z$ . Коснёмся некоторых особенностей плоской эллиптически поляризованной (рис. 6.10, а) волны (подробнее, см., например, [Бурсиан, 1972], с. 246 – 250).

Если определяемая выражениями (6.69) плоская электромагнитная волна поляризована эллиптически, то эллипсы поляризации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – подобны, а оси этих эллипсов (для составляющих  $E_x$  и  $H_y$ ) – взаимно – ортогональны. Отношение компонент комплексных векторов  $\overset{\vee}{E}$  и  $\overset{\vee}{H}$  в соответствующих точках эллипсов определяет выражение (6.71). Вследствие различия начальных фаз этих компонент направления действительных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в каждый момент времени в общем случае не ортогональны друг другу. Исключение составляет случай непроводящей среды. При  $\gamma=0$  согласно (6.71') импеданс  $Z$  – действительная величина и векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – взаимно – ортогональны.

## VIII. Применение ряда Фурье

Пусть  $F(t)$  – периодическая функция времени  $t$  с периодом  $T$  (рис. 6.15). Пользуясь рядом Фурье, можем представить  $F(t)$  суммой гармонических колебаний ("гармоник"). Ряд Фурье для периодической функции  $F(t)$ :

$$F(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n \cdot \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n \cdot \omega t), \quad (6.72)$$

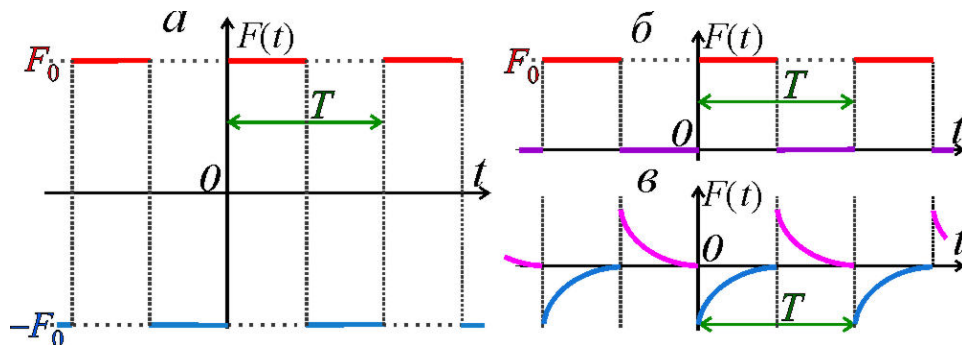
где (как и ранее)  $\omega=2\pi\cdot f=2\pi/T$ , то есть произведение

$$\omega\cdot T=2\pi. \quad (6.73)$$

В (6.72)  $n$  – "номер" гармоники,  $b_0$ ,  $b_n$ ,  $a_n$  – коэффициенты Фурье, которые зависят от функции  $F(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} F(t) dt, & b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_t^{t+T} F(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_t^{t+T} F(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

В соответствии с (6.74)<sub>1</sub> коэффициент  $b_0$  равен среднему за период  $T$



**Рис. 6.15.**

Примеры периодических функций  $F(t)$  с периодом  $T$

значению функции  $F(t)$ , а коэффициенты  $b_n$ ,  $a_n$  характеризуют амплитуды и (различающиеся на  $n\cdot\pi/2$ ) фазы гармоник, суммой которых мы можем представить функцию, равную разности  $F(t)-b_0$ .

Пример расчёта коэффициентов Фурье. Пусть функция времени  $t$   $F(t)$  – это бесконечная последовательность имеющих одинаковую длительность и амплитуду разнополярных прямоугольных импульсов без пауз ("меандр") (рис. 6.15, а). Определим коэффициенты Фурье для такой функции  $F(t)$ . Для рассматриваемого примера в выражениях (6.74) проще выбрать  $t=0$ . Тогда согласно (6.74)<sub>1</sub>

$$b_0 = \frac{1}{T} \cdot \left[ \int_0^{T/2} F_0 dt + \int_{T/2}^T (-F_0) dt \right] = \frac{F_0}{T} \cdot \left( \frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right) = 0.$$

То есть, конечно, в примере на рис. 6.15, а среднее за период  $T$  значение  $b_0$  функции  $F(t)$  равно нулю. Для коэффициентов  $b_n$  из (6.74)<sub>2</sub> получаем

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2F_0}{T} \left[ \int_0^{T/2} \cos(n \cdot \omega t) dt - \int_{T/2}^T \cos(n \cdot \omega t) dt \right] = \\ &= \frac{2F_0}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left[ \int_0^{T/2} \cos(n \cdot \omega t) d(n \cdot \omega t) - \int_{T/2}^T \cos(n \cdot \omega t) d(n \cdot \omega t) \right] = \\ &= \frac{2F_0}{n \cdot (\omega \cdot T)} \left\{ \sin[n \cdot (\omega t)] \Big|_0^{T/2} - \sin[n \cdot (\omega t)] \Big|_{T/2}^T \right\}. \end{aligned}$$

Согласно (6.73), произведение  $\omega \cdot T=2\pi$ . Поэтому

$b_n = \frac{F_0}{\pi \cdot n} \{ \sin(\pi \cdot n) - 0 - \sin(2\pi \cdot n) + \sin(\pi \cdot n) \} = 0$  так как при целом  $n$  имеем:

$\sin(\pi \cdot n) = 0, \sin(2\pi \cdot n) = 0$ . В соответствии с (6.74)<sub>3</sub> коэффициенты

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2F_0}{T} \left[ \int_0^{T/2} \sin(n \cdot \omega t) dt - \int_{T/2}^T \sin(n \cdot \omega t) dt \right] = \\ &= \frac{2F_0}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left[ \int_0^{T/2} \sin(n \cdot \omega t) d(n \cdot \omega t) - \int_{T/2}^T \sin(n \cdot \omega t) d(n \cdot \omega t) \right] = \\ &= \frac{2F_0}{n \cdot (\omega \cdot T)} \left\{ -\cos[n \cdot (\omega t)] \Big|_0^{T/2} + \cos[n \cdot (\omega t)] \Big|_{T/2}^T \right\}. \end{aligned}$$

Так как  $\omega \cdot T = 2\pi$  коэффициенты

$$a_n = \frac{F_0}{n \cdot \pi} \{ 1 - \cos(n \cdot \pi) + 1 - \cos(n \cdot \pi) \} = \frac{2F_0}{n \cdot \pi} [1 - \cos(n \cdot \pi)].$$

Получим выражения для коэффициентов  $a_n$  при  $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$1) n=1. \quad \cos(1 \cdot \pi) = -1, \quad a_1 = (2F_0/\pi) \cdot [1 - (-1)] = (4F_0/\pi);$$

$$2) n=2. \quad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \quad a_2 = (F_0/\pi) \cdot [1 - 1] = 0;$$

$$3) n=3. \quad \cos(3 \cdot \pi) = -1, \quad a_3 = (2F_0/3\pi) \cdot [1 - (-1)] = (4F_0/3\pi);$$

$$4) n=4. \quad \cos(4 \cdot \pi) = 1, \quad a_4 = (F_0/2\pi) \cdot [1 - 1] = 0;$$

$$5) n=5. \quad \cos(5 \cdot \pi) = -1, \quad a_5 = (2F_0/5\pi) \cdot [1 - (-1)] = (4F_0/5\pi), \dots$$

Итак, "меандр" с периодом  $T$  (рис. 6.15, а) можно выразить рядом Фурье по синусам с нулевыми чётными гармониками:

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3 \cdot \omega t) + \frac{1}{5} \sin(5 \cdot \omega t) + \dots + \frac{1}{n} \sin(n \cdot \omega t) + \dots \right],$$

где в соответствии с (6.73)  $\omega = 2\pi/T$ , а  $n$  – целое нечётное число. Амплитуды гармоник обратно пропорциональны "номерам"  $n$  гармоник.

## IX. Применение интеграла Фурье

Если  $F(t)$  – не периодическая функция аргумента  $t$ , то её можно выразить интегралом Фурье. В комплексной форме интеграл Фурье:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] d\omega. \quad (6.75)$$

В отличие от (6.73) в (6.75) функция  $F(t)$  – сумма гармонических колебаний при их "сплошном" спектре. То есть в (6.75) частота  $f = \omega/(2\pi)$  – любое рациональное число:  $-\infty < f < \infty$ .

В (6.75)  $S(\omega)$  – спектральная плотность (спектр) функции  $F(t)$ , которую определяет выражение:

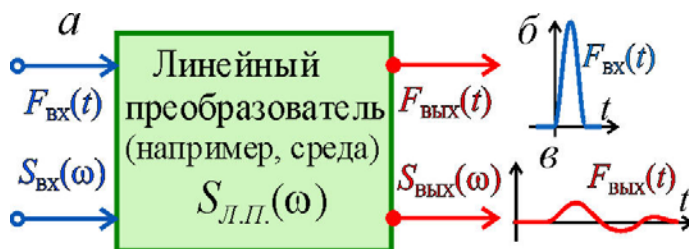
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega t) dt. \quad (6.76)$$

Чтобы преобразование Фурье было "симметричным" вместо множителя  $1/2\pi$  в (6.75) применяют множители  $(1/2\pi)^{1/2}$  в правых частях (6.75) и (6.76). В выражениях (6.75), (6.76) можно (взаимно) поменять знаки в аргументах  $(i\omega t)$  и  $(-i\omega t)$  экспонент.

При применении преобразования Фурье можно также воспользоваться теоремой о свёртке (см., например, [Анго, 1964], с. 109 – 113). Эта теорема доказывает следующее. Если "сигнал", на "входе" линейного преобразователя  $L.P.$  – функция  $F_{\text{вх}}(t)$  со спектром  $S_{\text{вх}}(\omega)$ , а "сигнал", на "выходе" линейного преобразователя – функция  $F_{\text{вых}}(t)$  со спектром  $S_{\text{вых}}(\omega)$  (рис. 6.16), то

$$F_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) * S_{L.P.}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega. \quad (6.77)$$

В (6.77)  $S_{L.P.}(\omega)$  – спектральная характеристика линейного преобразователя. Таким линейным преобразователем может служить среда (модель среды).



**Рис. 6.16.**

К преобразованию Фурье

спектральную характеристику  $S_{L.P.}(\omega)$ , а затем воспользоваться интегралом (6.77). Для определения функции  $S_{\text{вх}}(\omega)$  в (6.77) служит выражение (6.76).

Пример. Пусть показанную на рис. 6.17, *a* (синим цветом) функцию  $F(t)$  определяют выражения:

$$F(t) = \begin{cases} h & \text{при } |t| \leq t_0/2, \\ 0 & \text{при } t > t_0/2, \end{cases} \quad (6.78)$$

а (численно) произведение  $t_0 \cdot h = 1$ , то есть  $h = 1/t_0$ . Это означает, что площадь показанного на рис. 6.17, *a* прямоугольника численно равна единице.

Согласно (6.76), спектральная характеристика такой функции  $F(t)$

$$S(\omega) = h \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \exp(-i \cdot \omega t) dt.$$

По формуле Эйлера (6.47")  $\exp(-i \cdot \omega t) = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ . Поэтому

$$S(\omega) = h \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \cos(\omega t) dt - i \cdot h \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \sin(\omega t) dt.$$

Принимая во внимание, что  $dt = (1/\omega) \cdot d(\omega t)$ , получаем:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{h}{\omega} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \cos(\omega t) d(\omega t) - i \cdot \frac{h}{\omega} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \sin(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{h}{\omega} \cdot \left[ \sin \frac{\omega t_0}{2} - \sin \frac{-\omega t_0}{2} \right] - i \cdot \frac{h}{\omega} \cdot \left[ -\cos \frac{\omega t_0}{2} + \cos \frac{-\omega t_0}{2} \right] = \frac{2h}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega t_0}{2}. \end{aligned}$$

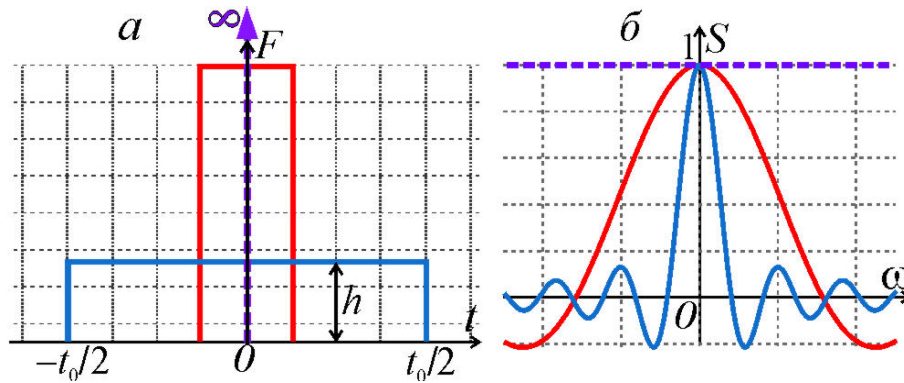
Так как в соответствии с принятым выше условием  $h = 1/t_0$  можем представить

Следовательно, при решении прямой задачи электродинамики для не гармонически меняющегося переменного поля можно применить следующий подход. Сначала получить решение задачи для (более простого) гармонически меняющегося поля с круговой частотой  $\omega$  для соответствующей модели среды, т. е. определить

выражение для спектральной характеристики  $S(\omega)$  в следующем виде:

$$S(\omega) = \sin \frac{\omega t_0}{2} / \frac{\omega t_0}{2}. \quad (6.79)$$

Числитель и знаменатель в выражении (6.79) для  $S(\omega)$  – нечётные функции аргумента  $\omega$ . Следовательно, их отношение – чётная функция  $S(\omega)$ .



**Рис. 6.17.**

Прямоугольный "импульс" и дельта - функция Дирака (а); их спектральные характеристики (б)

При  $\omega \rightarrow 0$  функция  $S(0) \rightarrow 1$  (первый замечательный предел). Для показанной на рис. 6.17, а синим цветом зависимости  $F(t)$  её спектральная характеристик

а тем же цветом показана на рис. 6.17, б.

Пусть теперь длительность  $t_0$  уменьшилась, а значение  $h$  увеличилось так, чтобы произведение  $t_0 \cdot h$  не изменилось (численно  $t_0 \cdot h = 1$ ). Такая зависимость  $F(t)$  показана на рис. 6.17, а красным цветом. В соответствии с (6.79) этой функции  $F(t)$  соответствует показанная тем же цветом спектральная характеристика  $S(\omega)$  на рис. 6.17, б. Видно, что уменьшение длительности  $t_0$  приводит к "растяжению" функции  $S(\omega)$  по оси абсцисс.

В предельном случае ( $t_0 \rightarrow 0, h \rightarrow \infty, t_0 \cdot h = 1$ ) получаем (здесь – как функцию времени  $t$ ) дельта - функцию Дирака  $\delta_D(t)$  (см. раздел V § 8 главы второй):

$$\delta_D(t) = 0 \text{ при } t \neq 0, \quad \delta_D(t) = \infty \text{ при } t = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_D(t) dt = 1. \quad (6.79')$$

В соответствии с (6.79) при  $t_0 \rightarrow 0$  спектральная характеристика функции  $\delta_D(t)$ :

$$S_{\delta}(\omega) = 1. \quad (6.79'')$$

На рис. 6.17 функция  $\delta_D(t)$  и её спектральная характеристика  $S_{\delta}(\omega)$  показаны штриховыми линиями.

Согласно (6.75), (6.79'), (6.79''), функцию Дирака  $\delta_D(t)$  можно выразить суммой функций  $\cos(\omega \cdot t)$ , амплитуды которых одинаковы, а круговые частоты  $\omega$  непрерывно меняются от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Ещё одну из некоторых специфических особенностей функции  $\delta_D$  характеризует выражение: при  $x_a < x_0 < x_b$  интеграл  $\int_{x_a}^{x_b} f(x) \cdot \delta_D(x - x_0) dx = f(x_0)$ .

## Глава седьмая. Прямая задача теории переменного электромагнитного поля

Эта задача состоит в определении электромагнитного поля по заданным (не зависящим от ЭМ поля) его возбудителям и модели среды. В этой главе речь пойдёт об определении электромагнитного поля (или его потенциалов) на основе решения системы уравнений электродинамики или уравнений электродинамических потенциалов.

### § 1. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этом параграфе будем вести изложение применительно к общему случаю (произвольной зависимости поля от времени).

Из главы шестой известно, что электромагнитное поле  $\mathcal{F}$ , описываемое совокупностью векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{j}$ , удовлетворяет системе уравнений (6.12), (6.13) при заданных функциях  $\gamma(a)$ ,  $\varepsilon(a)$ ,  $\mu(a)$ ,  $\mathbf{j}^{\text{стр}}(a, t)$ , характеризующих среду и независимые возбудители поля.

Согласно (6.42)<sub>2</sub> плотность зарядов  $\delta^{\text{стр}}(a, t)$  определяется с точностью до постоянного слагаемого полем  $\mathbf{j}^{\text{стр}}(a, t)$ .

Выясним, какими условиями надо дополнить систему уравнений (6.12), (6.13) для того, чтобы её решения определялись однозначно.

#### I. Краевые и начальные условия

Будем считать, что мы определяем электромагнитное поле в области  $V$  для промежутка времени  $[t_0, t_m]$  ( $t_0 \leq t \leq t_m$ ). Допустим, что два поля  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$ , описываемые совокупностями векторов  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ , ...,  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ , ...,  $\mathbf{j}''$ , удовлетворяют системе (6.12), (6.13) в области  $V$  в промежуток  $[t_0, t_m]$  времени  $t$ , а  $\mathcal{F}'''$  – поле, описываемое совокупностью векторов  $\mathbf{E}''' = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ , ...,  $\mathbf{j}''' = \mathbf{j}' - \mathbf{j}'' = \gamma \cdot \mathbf{E}'''$ .

Последнее равенство объясняется тем, что поле  $\mathbf{j}^{\text{стр}} = \gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}$  задано и, следовательно, одинаково для электромагнитных полей  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$ . Иначе говоря, можно положить  $\mathbf{j}^{\text{стр}'''} = 0$ .

Согласно (6.16) электромагнитную энергию поля  $\mathcal{F}'''$  в области  $V$  определяет формула

$$W''' = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\varepsilon_a \cdot E'''^2 + \mu_a \cdot H'''^2) dV, \quad (7.1)$$

из которой следует, что энергия

$$W''' \geq 0. \quad (7.2)$$

$$\text{При } W''' = 0 \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'', \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}'', \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j}'', \quad (7.2')$$

следовательно, для единственности решения системы (6.12) достаточны условия, обеспечивающие равенство нулю величины  $W'''$ .

В соответствии с (6.19) производная по времени



$$\frac{dW'''}{dt} = P''' - Q''' - \oint_{S[V]} (\mathbf{Y}''' \mathbf{dS}), \quad (7.3)$$

где в соответствии с (6.20), (6.21)

$$P''' = \int_V (\mathbf{E}''' \mathbf{j}^{\text{ср}'''} \cdot \mathbf{dV}), \quad Q''' = \int_V \rho \cdot j'''^2 dV, \quad \mathbf{Y}''' = [\mathbf{E}''' \mathbf{H}'''],$$

а  $P'''$ ,  $Q'''$ ,  $\mathbf{Y}'''$  – скаляры  $P$ ,  $Q$  и вектор Умова – Пойнтинга  $\mathbf{Y}$ , соответствующие разностному полю  $\mathcal{F}'''$ . Однако, как было отмечено, следует считать  $\mathbf{j}^{\text{ср}'''}=0$ , поэтому согласно (6.20)<sub>1</sub> в правой части (7.3) слагаемое  $P'''=0$  и в соответствии с (6.20)<sub>2</sub>, (6.21)

$$\frac{dW'''}{dt} = - \int_V \gamma \cdot E'''^2 dV - \oint_{S[V]} [\mathbf{E}''' \mathbf{H}''']_n dS. \quad (7.3')$$

Подынтегральная функция в поверхностном интеграле в (7.3') – нормальная к  $S[V]$  компонента вектора  $\mathbf{Y}'''$ .

Теперь представим себе, что нам из физических условий задачи известны значения полной тангенциальной компоненты электрического или магнитного поля в любой точке  $p$  поверхности  $S[V]$  в любой момент времени от  $t_0$  до  $t_m$ , т. е. допустим, что

$$[\mathbf{n} \mathbf{E}(p, t)] = \mathbf{R}(p, t) \quad \text{или} \quad [\mathbf{n} \mathbf{H}(p, t)] = \mathbf{G}(p, t), \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_m, \quad (7.4)$$

где вектор  $\mathbf{R}(p, t)$  или  $\mathbf{G}(p, t)$  задан во всех точках  $p$  поверхности  $S[V]$ . Если поля  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  этому условию удовлетворяют, то в любой точке границы  $S[V]$  области  $V$   $[\mathbf{n} \mathbf{E}'''] = 0$  или  $[\mathbf{n} \mathbf{H}'''] = 0$ . При любом из этих равенств вектор  $[\mathbf{E}''' \mathbf{H}''']$  лежит в плоскости, касательной к поверхности  $S[V]$ , поэтому компонента  $[\mathbf{E}''' \mathbf{H}''']_n = 0$  и, следовательно,

$$\frac{dW'''}{dt} = - \int_V \gamma \cdot E'''^2 dV, \quad \text{откуда} \quad \frac{dW'''}{dt} \leq 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_m. \quad (7.3'')$$

Таким образом, величина  $W'''$  в любой момент  $t$  промежутка времени  $[t_0, t_m]$  не может быть больше, чем в момент  $t_0$ :

$$W'''(t) \leq W'''(t_0) \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_m. \quad (7.3''')$$

Допустим ещё, что заданы значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке  $a$  области  $V$  для момента  $t_0$ , т. е. задано

$$\mathbf{E}(a, t_0) = \mathbf{E}_0(a) \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(a, t_0) = \mathbf{H}_0(a), \quad (7.4')$$

где поля  $\mathbf{E}_0(a)$  и  $\mathbf{H}_0(a)$  известны во всей области  $V$ . Если составляющие  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$  полей  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  удовлетворяют этому условию, то  $\mathbf{E}'''(a, t_0) = 0$ ,  $\mathbf{H}'''(a, t_0) = 0$  и согласно (7.1)

$$W'''(t_0) = 0. \quad (7.5)$$

Сопоставляя (7.2), (7.3'''), (7.5), приходим к выводу, что

$$W'''(t) = 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_m, \quad (7.5')$$

а из этого в соответствии с (7.2') следует, что в любой точке  $a$  области  $V$  в промежуток времени  $[t_0, t_m]$  решения  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  системы (6.12), (6.13) совпадают:

$$\mathbf{E}'(a, t) = \mathbf{E}''(a, t), \quad \mathbf{H}'(a, t) = \mathbf{H}''(a, t) \quad \text{при } t_0 \leq t \leq t_m. \quad (7.5'')$$

Следовательно, решение этой системы, удовлетворяющее *краевым условиям* (7.4) и *начальным условиям* (7.4'), является единственным.

## II. Условия сопряжения (граничные условия). Условия у особых точек и линий

Условия (7.4), (7.4') достаточны для обеспечения единственности решения системы уравнений электродинамики в области  $V$ , в которой нет особых точек, линий и поверхностей электромагнитного поля. Если такие точки  $q_{oc}$ , линии  $l_{oc}$  и поверхности  $S_{oc}$  в области  $V$  есть, то при получении формулы (6.19) следовало бы (аналогично изложенному в разделе I, § 8 главы первой) охватить их поверхностями безопасности  $S_{бп}$  ( $S[q_{oc}]$ ,  $S[l_{oc}]$  и  $S[S_{oc}]$ ) и применить в (6.18) теорему Гаусса – Остроградского к области  $V^*$ , представляющей собой область  $V$  без её частей, ограниченных поверхностями  $S_{бп}$ . В результате в правых частях (7.3), (7.3') появились бы дополнительные члены – потоки вектора  $\mathbf{Y}'''$  через поверхности  $S_{бп}$ . Для обращения в нуль этих членов и получения формулы (7.3'')<sub>1</sub> достаточно, чтобы поля  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  удовлетворяли условиям (для поля  $\mathcal{F}$ ) у особых точек и линий и условиям сопряжения на особых поверхностях. Выведем условия сопряжения.

Для единственности решения системы (6.12), (6.13) надо в соответствии с (7.3) потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\oint_{S[S_{oc}]} (\mathbf{Y}''' \, d\mathbf{S}) = 0$$

или, принимая во внимание выражение (1.48') для поверхностной дивергенции, получаем

$$\oint_{S_{oc}} \text{Div } \mathbf{Y}''' \, dS = 0.$$

При ограниченных значениях  $\mathbf{Y}'''$  это равенство согласно (1.49) принимает вид

$$\oint_{S_2} Y_n'''^{(2)} \, dS = \oint_{S_1} Y_n'''^{(1)} \, dS,$$

где  $\mathbf{Y}'''^{(1)}$  и  $\mathbf{Y}'''^{(2)}$  – значения вектора  $\mathbf{Y}'''$  на сторонах  $S_1$  и  $S_2$  поверхности  $S_{oc}$  (см. **рис. 1.14, в** в главе первой). Для выполнения последнего равенства потребуем, чтобы в каждой точке  $p$  поверхности  $S_{oc}$  в любой момент времени  $t$  промежутка  $[t_0, t_m]$  выполнялось условие

$$\left. \begin{aligned} Y_n'''^{(2)}(p, t) &= Y_n'''^{(1)}(p, t), \quad \text{т. е.} \\ \left[ \mathbf{E}'''^{(2)}(p, t) \, \mathbf{H}'''^{(2)}(p, t) \right]_n &= \left[ \mathbf{E}'''^{(1)}(p, t) \, \mathbf{H}'''^{(1)}(p, t) \right]_n \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Достаточным для выполнения (7.6) условием является непрерывность тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{E}'''$  и  $\mathbf{H}'''$  на  $S_{oc}$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \mathbf{n} \mathbf{E}'''^{(2)}(p, t) \right] &= \left[ \mathbf{n} \mathbf{E}'''^{(1)}(p, t) \right] \text{ и} \\ \left[ \mathbf{n} \mathbf{H}'''^{(2)}(p, t) \right] &= \left[ \mathbf{n} \mathbf{H}'''^{(1)}(p, t) \right] \text{ при } t_0 \leq t \leq t_M \end{aligned} \right\} \quad (7.6')$$

Напомним, что векторное произведение  $[\mathbf{n} \mathbf{M}] = \mathbf{M}_\tau$ , где  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль, а  $\mathbf{M}_\tau$  – полная тангенциальная компонента вектора  $\mathbf{M}$ .

Допустим, что из физических условий задачи известны разрывы функций  $[\mathbf{n} \mathbf{E}]$  и  $[\mathbf{n} \mathbf{H}]$  на  $S_{oc}$ , т. е. для любой точки  $p$  поверхности  $S_{oc}$  и любого момента времени  $t$  промежутка  $[t_0, t_M]$  могут быть заданы два условия сопряжения:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \mathbf{n} \mathbf{E}^{(2)}(p, t) \right] - \left[ \mathbf{n} \mathbf{E}^{(1)}(p, t) \right] &= \mathbf{R}_{12}(p, t), \\ \left[ \mathbf{n} \mathbf{H}^{(2)}(p, t) \right] - \left[ \mathbf{n} \mathbf{H}^{(1)}(p, t) \right] &= \mathbf{G}_{12}(p, t) \text{ при } t_0 \leq t \leq t_M, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

где  $\mathbf{R}_{12}(p, t)$ ,  $\mathbf{G}_{12}(p, t)$  – известные функции положения точки  $p$  на поверхности  $S_{oc}$  и времени  $t$ . Очевидно, что, если соответствующие компоненты полей  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  удовлетворяют условиям (7.7), то компоненты разностного поля  $\mathcal{F}'''$  удовлетворяют условиям (7.6'). Таким образом, выполнение *условий сопряжения* (7.7) (наряду с краевыми и начальными условиями) достаточно для единственности решения системы (6.12), (6.13).

На основе краевых условий могут быть получены *условия у особых точек и линий*. Как и в случае постоянного поля, эти условия сводятся к совпадению полей  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  при неограниченном приближении точки наблюдения к особой точке  $q_{oc}$  или особой линии  $l_{oc}$ , а для этого достаточно задания выражений для соответствующих компонент электромагнитного поля у особых точек и линий (см. § 3, 4).

### III. Теорема единственности

Таким образом, получаем теорему единственности решения системы уравнений электродинамики. Переменное электромагнитное поле в области  $V$  в промежуток времени  $[t_0, t_M]$  однозначно определяет система уравнений (6.12), (6.13) с подстановкой заданных функций  $\gamma(a)$ ,  $\varepsilon(a)$ ,  $\mu(a)$ ,  $\mathbf{j}^{стр}(a, t)$ , заданием краевых условий (7.4), начальных условий (7.4'), двух условий сопряжения (7.7) на любой особой поверхности, находящейся внутри области  $V$  и заданием выражений у особых точек  $q_{oc}$  и линий  $l_{oc}$  в области  $V$  для компонент векторов, описывающих электромагнитное поле.

Эту теорему необходимо дополнить следующими замечаниями.

1. Если область  $V$  снаружи не ограничена, то краевые условия на внешней её границе (бесконечно удаленной поверхности  $\Sigma$ ) заменяют условия в бесконечности. Асимптотические выражения для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (при удалении точки наблюдения в бесконечность) зависят от многих обстоятельств. Ограничиваясь условием нахождения всех возбудителей поля на конечных расстояниях  $R$  от начала отсчета, можно было бы пользоваться условием стремления  $E$  и  $H$  к нулю как  $1/R^2$  при  $R \rightarrow \infty$ . Но это, достаточное при любых видах (локальных) возбудителей (в том числе постоянных),

условие является слишком жёстким; оно, как показывают расчёты, не выполняется в весьма важных случаях (см. § 3, 4). Можно обойтись менее жёстким условием стремления  $E$  и  $H$  к нулю быстрее, чем  $1/R$  при  $R \rightarrow \infty$ , достаточным для обращения в нуль потока вектора Умова – Пойнтинга  $\mathbf{U} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$  через бесконечно удалённую поверхность. Это условие выполнимо для электромагнитного поля переменного диполя при  $\gamma > 0$  (см. § 3, 4), а к случаю  $\gamma = 0$  можно перейти от случая малых значений  $\gamma$ , как к предельному.

2. В отсутствии поверхностных токов и неоднородных двойных электрических слоёв (неоднородных контактных э. д. с.) условия сопряжения (7.7) согласно (6.14)<sub>1,2</sub>, (6.14')<sub>1,2</sub> вырождаются в условия непрерывности тангенциальных (к  $S_{oc}$ ) составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n} \mathbf{E}^{(2)}(p, t)] &= [\mathbf{n} \mathbf{E}^{(1)}(p, t)], \\ [\mathbf{n} \mathbf{H}^{(2)}(p, t)] &= [\mathbf{n} \mathbf{H}^{(1)}(p, t)] \text{ при } t_0 \leq t \leq t_M \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Особыми поверхностями в этом случае являются границы – поверхности разрыва параметров среды:  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ .

Для выполнения условий (7.8)<sub>1</sub> и (7.8)<sub>2</sub> для *переменного* электромагнитного поля достаточно, чтобы на  $S_{oc}$  отсутствовали *меняющиеся со временем* неоднородные контактные э. д. с. и поверхностные токи.

3. В случае *гармонически* *меняющегося* поля отпадает необходимость начальных условий (7.4') для единственности решения системы уравнений электродинамики. Это видно хотя бы из того, что в системе (6.55) уравнения

для величин  $\overset{\vee}{\eta}$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{N}}$  можно заменить уравнениями для не зависящих от времени амплитудных величин  $\overset{\vee}{\eta}_0$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{N}}_0$ . Очевидно, что краевые условия и условия сопряжения (граничные условия) в случае гармонически *меняющегося* поля достаточно задать для амплитудных величин  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}_0$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}_0$ .

4. Применительно к переменному электромагнитному полю остаются справедливыми замечания, приведенные в разделе IV § 7 главы первой, а также замечания, аналогичные тем, которые содержатся в разделе II § 8 главы первой.

## § 2. ПОТЕНЦИАЛЫ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ЭМ ПОЛЯ

Различают электродинамические потенциалы двух типов: электрического ( $\mathbf{A}$ ,  $U$ ) и магнитного ( $\mathbf{A}^*$ ,  $U^*$ ). Потенциалы магнитного типа применимы для области, в которой отсутствуют свободные заряды ([Альпин, 1966], с. 375 – 381). Обычно пользуются такими потенциалами, когда заданными (сторонними) возбудителями поля являются замкнутые токи – возбудители магнитного типа (в частности, магнитные диполи). В области, в которой присутствуют возбудители электрического типа (заданы разомкнутые токи, например, электрические диполи), вводят потенциалы

электрического типа.

Электродинамические потенциалы электрического типа применимы также и для такой области  $V$ , в которой заданные возбудители поля являются замкнутыми сторонними токами.

Вместо потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $U$  или  $\mathbf{A}^*$ ,  $U^*$  применяют также связанные с ними поляризаационные потенциалы  $\mathbf{\Pi}$  или  $\mathbf{\Pi}^*$  – векторы Герца электрического или магнитного типа.

В § 5 главы шестой, где шла речь о произвольно меняющемся со временем электромагнитном поле, рассматривались только потенциалы,  $\mathbf{A}$  и  $U$ . Здесь применительно к гармонически меняющемуся полю уделим внимание также потенциалам других типов.

### I. Потенциалы электрического типа: $\mathbf{A}$ , $U$ , $\mathbf{\Pi}$

В случае гармонически меняющегося поля вместо (6.37), (6.44), (6.46)<sub>1</sub> получаем (при применении комплексной записи) для электродинамических потенциалов  $\check{\mathbf{A}}$  и  $\check{U}$  соотношения

$$\check{\mathbf{B}} = \text{rot } \check{\mathbf{A}}, \quad \check{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \check{\mathbf{A}}. \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{E}} = i \cdot \omega \cdot \check{\mathbf{A}} - \text{grad } \check{U}, \quad \text{div } \check{\mathbf{A}} = -\mu_a \cdot (\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a) \cdot \check{U} = -\frac{k^2}{i \cdot \omega} \cdot \check{U}, \\ \nabla^2 \check{\mathbf{A}} + k^2 \cdot \check{\mathbf{A}} = 0, \end{aligned} \right\} (7.9')$$

где (7.9')<sub>2</sub> – условие калибровки, а уравнение (7.9')<sub>3</sub> справедливо для однородной области  $V$ , в которой вектор плотности стороннего тока  $\mathbf{j}^{\text{стр}}=0$ .

В соответствии с (7.9)<sub>1</sub> размерность такого векторного потенциал  $\mathbf{A}$ : Гл·м.

Из (7.9')<sub>1,2</sub> следует, что

$$\check{\mathbf{E}} = i \cdot \omega \cdot \check{\mathbf{A}} + \text{grad div} \frac{\check{\mathbf{A}}}{\mu_a \cdot (\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a)} = i \cdot \omega \cdot \left[ \check{\mathbf{A}} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \check{\mathbf{A}} \right], \quad (7.10)$$

т. е. вектор  $\check{\mathbf{E}}$  (как, и вектор  $\check{\mathbf{H}}$ ) может быть выражен через векторный потенциал  $\check{\mathbf{A}}$ .

Часто потенциалы электрического типа вводят иначе. При  $\nabla \mu=0$  (различные области  $V$  среды однородны по магнитной проницаемости) в соответствии с (6.31)<sub>III</sub> уравнение (6.55)<sub>III</sub> принимает вид  $\text{div } \check{\mathbf{H}}=0$ , откуда следует, что  $\check{\mathbf{H}}=\text{rot } \check{\mathbf{A}}_H$ . Выполняя преобразования, аналогичные указанным в разделах I и V § 5 главы шестой, получаем вместо (7.9)<sub>2</sub>, (7.9')<sub>2</sub>, (7.10), (7.9')<sub>3</sub> соответственно

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{H}} &= \text{rot } \check{\mathbf{A}}_H, & \text{div } \check{\mathbf{A}}_H &= -(\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \check{U}_H, \\ \check{\mathbf{E}} &= i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \left( \check{\mathbf{A}}_H + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \check{\mathbf{A}}_H \right), & \nabla^2 \check{\mathbf{A}}_H + k^2 \cdot \check{\mathbf{A}}_H &= 0. \end{aligned} \right\} (7.11)$$

Согласно (7.11)<sub>1</sub> размерность такого векторного потенциал  $\mathbf{A}_H$ : А (амперы).

В однородной области  $V$  векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть выражены через вектор Герца  $\mathbf{\Pi}$ .

В случае произвольно меняющегося электромагнитного поля векторы  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{\Pi}^*$  связаны с электродинамическими потенциалами соотношениями ([Альпин, 1966, с. 374 – 381]):  $\check{U} = \text{div } \mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{A} = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot (\partial \mathbf{\Pi} / \partial t) + \gamma \cdot \mu_a \cdot \mathbf{\Pi}$ ;  $U^* = \text{div } \mathbf{\Pi}^*$ ,  $\mathbf{A}^* = \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot (\partial \mathbf{\Pi}^* / \partial t)$ .

В случае гармонически меняющегося поля вектор  $\mathbf{\Pi}$  отличается от вектора  $\check{\mathbf{A}}$  только множителем  $i \cdot \omega / k^2$ :

$$\mathbf{\Pi} = (i \cdot \omega / k^2) \cdot \check{\mathbf{A}}. \quad (7.12)$$

Из (7.9)<sub>2</sub>, (7.9')<sub>3</sub>, (7.10), (7.12) получаем

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{H}} &= (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \text{rot } \mathbf{\Pi}, & \nabla^2 \mathbf{\Pi} + k^2 \cdot \mathbf{\Pi} &= 0, \\ \check{\mathbf{E}} &= k^2 \cdot \mathbf{\Pi} + \text{grad div } \mathbf{\Pi} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}. \end{aligned} \right\} (7.12')$$

## II. Потенциалы магнитного типа: $\mathbf{A}^*$ , $U^*$ , $\mathbf{\Pi}^*$

В отсутствии свободных зарядов уравнение (6.55)<sub>IV</sub> принимает вид  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , откуда в соответствии с (1.74') следует:

$$\mathbf{D} = \text{rot } \check{\mathbf{A}}^*. \quad (7.13)$$

Согласно (7.13) размерность такого векторного потенциал  $\mathbf{A}^*$ : Кл/м.

Для однородных областей  $V$ , в которых  $\mathbf{j}^{\text{ср}} = 0$ , аналогично (7.9')<sub>2,3</sub>, (7.10) получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \check{\mathbf{A}}^* &= -i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \check{U}^*, & \check{\mathbf{H}} &= \left( \frac{\gamma}{\varepsilon_a} - i \cdot \omega \right) \cdot \left[ \check{\mathbf{A}}^* + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \check{\mathbf{A}}^* \right], \\ & & \nabla^2 \check{\mathbf{A}}^* + k^2 \cdot \check{\mathbf{A}}^* &= 0. \end{aligned} \right\} (7.13')$$

Если  $\text{div } \mathbf{j}^{\text{ср}} = 0$  и  $\nabla \gamma' = 0$ , то в соответствии с (6.55)<sub>V</sub>, (6.56'''), (6.56''''')

$\text{div } \check{\mathbf{E}} = 0$ , т. е. при этих условиях в однородных по  $\gamma'$  областях  $V$  поле  $\mathbf{E}$  – чисто вихревое. Поэтому в таких случаях можем выразить ЭМ поле через электродинамические потенциалы не равенствами (7.13), (7.13'), а по-другому:



$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{E}} &= \text{rot } \check{\mathbf{A}}^*_E, & \text{div } \check{\mathbf{A}}^*_E &= -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \check{U}^*_E, \\ \check{\mathbf{H}} &= (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \left[ \check{\mathbf{A}}^*_E + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \check{\mathbf{A}}^*_E \right], & \nabla^2 \check{\mathbf{A}}^*_E + k^2 \cdot \check{\mathbf{A}}^*_E &= 0. \end{aligned} \right\} (7.14)$$

В соответствии с (7.14)<sub>1</sub> размерность такого векторного потенциал  $\check{\mathbf{A}}^*_E$ : В (вольты).

Аналогичный вектору  $\check{\mathbf{\Pi}}$  вектор Герца магнитного типа  $\check{\mathbf{\Pi}}^*$  отличается от вектора  $\check{\mathbf{A}}^*$  только множителем  $1/(i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a)$ :

$$\check{\mathbf{\Pi}}^* = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_a} \cdot \check{\mathbf{A}}^*. \quad (7.15)$$

Из выражений (7.15), (7.13), (7.13')<sub>2,3</sub> следует, что

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{E}} &= i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \text{rot } \check{\mathbf{\Pi}}^*, & \nabla^2 \check{\mathbf{\Pi}}^* + k^2 \cdot \check{\mathbf{\Pi}}^* &= 0, \\ \check{\mathbf{H}} &= k^2 \cdot \check{\mathbf{\Pi}}^* + \text{grad div } \check{\mathbf{\Pi}}^* = \text{rot rot } \check{\mathbf{\Pi}}^*. \end{aligned} \right\} (7.15')$$

### III. Граничные условия для потенциалов

Условия единственности для электродинамических потенциалов следуют из условий единственности решения системы уравнений электродинамики и приведенных выше выражений, связывающих эти потенциалы с векторами, описывающими электромагнитное поле. В частности, в соответствии со сказанным в замечании 1 в разделе III § 1 для каждого из введенных в § 5 главы шестой и в разделах I, II этой главы векторных потенциалов  $\mathbf{A}_{э-д} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{\Pi}, \dots$  условие в бесконечности обычно может быть записано в виде:

$$\text{при } R \rightarrow \infty \quad \mathbf{A}_{э-д} \rightarrow 0 \quad \text{не медленнее, чем } 1/R. \quad (7.16)$$

Рассмотрим более подробно условия сопряжения для потенциалов гармонически меняющегося ЭМ поля. Среду (модель среды) будем считать кусочно-однородной и полагать, что (меняющиеся во времени) поверхностные токи и неоднородные двойные электрические слои отсутствуют. При этих ограничениях условия сопряжения для электромагнитного поля имеют вид (7.8), т. е. на таких поверхностях  $S$  непрерывны компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по любому тангенциальному направлению  $t$ :

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}. \quad (7.16')$$

Эти (граничные) условия должны быть заданы на поверхностях разрыва параметров  $\gamma, \varepsilon$  или  $\mu$ .

Пусть поверхность  $S$ , по разные стороны которой (в областях  $V_1$  и  $V_2$ ) значения электромагнитных параметров равны соответственно  $\gamma_1, \varepsilon_1, \mu_1$  и  $\gamma_2, \varepsilon_2, \mu_2$ , совпадает с координатной поверхностью  $S_3$  ортогональной системы координат. На такой поверхности лежат координатные линии  $l_1$  и  $l_2$  (см. **рис. В. 6** в разделе "Введение" и раздел III § 1 главы первой). Волновое число

$k$  в областях  $V_1, V_2$  будем обозначать соответственно  $k_1, k_2$ .

Выведем условия сопряжения **для потенциала**  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  электрического типа, связанного с векторами  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  равенствами (7.9)<sub>2</sub>, (7.10). Из этих выражений для тангенциальных составляющих векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  в соответствии с (1.11), (1.25), (1.25') получаем

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{E}_1 &= i \cdot \omega \cdot \left( \overset{\vee}{A}_1 + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}} \right), & \overset{\vee}{E}_2 &= i \cdot \omega \cdot \left( \overset{\vee}{A}_2 + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}} \right), \\ \overset{\vee}{H}_1 &= \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \frac{1}{dl_2 dl_3} \cdot \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3 \right], \\ \overset{\vee}{H}_2 &= \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \frac{1}{dl_3 dl_1} \cdot \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_1 dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3 dl_3)}{\partial l_1} dl_1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

где  $\overset{\vee}{E}_1, \overset{\vee}{H}_1$  и  $\overset{\vee}{E}_2, \overset{\vee}{H}_2$  – компоненты векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  по координатным направлениям  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда для выполнения условий (7.8) необходимо, чтобы у поверхности  $S$  удовлетворялись равенства

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{A}_1^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)} &= \overset{\vee}{A}_1^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)}, \\ \overset{\vee}{A}_2^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)} &= \overset{\vee}{A}_2^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.18)_{1,2}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(1)} dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_2^{(1)} dl_2)}{\partial l_3} dl_3 \right] = \frac{1}{\mu_2} \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_2^{(2)} dl_2)}{\partial l_3} dl_3 \right], \quad (7.18)_3$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_1^{(1)} dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(1)} dl_3)}{\partial l_1} dl_1 \right] = \frac{1}{\mu_2} \left[ \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_1} dl_1 \right], \quad (7.18)_4$$

где  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)}, \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)}$  – значения вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  в областях  $V_1, V_2$ .

В конкретных случаях в зависимости от применяемой (в соответствии с условиями задачи) системы координат эти условия могут быть проделаны в более простом виде. Если, например, граница  $S$  – плоскость  $z = \text{const}$  декартовой системы координат (и очевидно, что на  $S$  лежат координатные линии  $l_x, l_y$ ), то из (7.18) в соответствии с (1.8) получаем

$$\left. \begin{aligned} \check{A}_x^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(1)} &= \check{A}_x^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)}, \\ \check{A}_y^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(1)} &= \check{A}_y^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)}, \end{aligned} \right\} (7.19)_{1,2}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \left[ \frac{\partial \check{A}_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \check{A}_y^{(1)}}{\partial z} \right] = \frac{1}{\mu_2} \cdot \left[ \frac{\partial \check{A}_z^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial \check{A}_y^{(2)}}{\partial z} \right], \quad (7.19)_3$$

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \left[ \frac{\partial \check{A}_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \check{A}_z^{(1)}}{\partial x} \right] = \frac{1}{\mu_2} \cdot \left[ \frac{\partial \check{A}_x^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \check{A}_z^{(2)}}{\partial x} \right], \quad (7.19)_4$$

где производную  $\operatorname{div} \check{\mathbf{A}}$  определяет выражение (1.33).

Для выполнения условий (7.19)<sub>1,2</sub> достаточно потребовать непрерывности величин  $\check{A}_x$ ,  $\check{A}_y$  и  $(\operatorname{div} \check{\mathbf{A}}/k^2)$ , а для выполнения условий (7.19)<sub>3,4</sub> достаточной является непрерывность величин

$$\frac{1}{\mu} \cdot \check{A}_z, \quad \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \check{A}_x}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \check{A}_y}{\partial z}.$$

Здесь учтено, что для непрерывного изменения тангенциальной производной некоторой величины при переходе через границу  $S$  достаточно непрерывного изменения самой этой величины при переходе через  $S$ . Таким же способом можно упростить приведенные ниже граничные условия (7.21), (7.22) для потенциалов  $\check{\mathbf{A}}_H$ ,  $\check{\mathbf{A}}^*_E$ .

Поэтому условия сопряжения для электродинамического потенциала  $\check{\mathbf{A}}$  могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \check{A}_x^{(1)} = \check{A}_x^{(2)}, \quad \check{A}_y^{(1)} = \check{A}_y^{(2)}, \quad \frac{1}{\mu_1} \check{A}_z^{(1)} = \frac{1}{\mu_2} \check{A}_z^{(2)}, \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \check{A}_x^{(1)}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \check{A}_x^{(2)}}{\partial z}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \check{A}_y^{(1)}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \check{A}_y^{(2)}}{\partial z}, \\ \frac{1}{k_1^2} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(1)} = \frac{1}{k_2^2} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)}. \end{aligned} \right\} (7.20)$$

Однако достаточные условия (7.20) – не необходимы и могут оказаться несовместными (см. раздел III, § 8 главы первой).

Аналогичным способом могут быть получены условия сопряжения для других векторных электродинамических потенциалов. Приведём эти условия для векторов  $\check{\mathbf{A}}_H$  и  $\check{\mathbf{A}}^*_E$ , соответствующие условиям (7.18) для вектора  $\check{\mathbf{A}}$ .

**Для потенциала  $\check{\mathbf{A}}_H$  (электрического типа), связанного с**

электромагнитным полем равенствами (7.11)<sub>1,3</sub>, получаем

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \left[ \overset{\vee}{A}_1^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)} \right] &= \mu_2 \left[ \overset{\vee}{A}_1^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)} \right], \\ \mu_1 \left[ \overset{\vee}{A}_2^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)} \right] &= \mu_2 \left[ \overset{\vee}{A}_2^{(2)} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)} \right], \end{aligned} \right\} (7.21)_{1,2}$$

$$\frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(1)} dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_2^{(1)} dl_2)}{\partial l_3} dl_3 = \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_2^{(2)} dl_2)}{\partial l_3} dl_3, (7.21)_3$$

$$\frac{\partial(\overset{\vee}{A}_1^{(1)} dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(1)} dl_3)}{\partial l_1} dl_1 = \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_1} dl_1. (7.21)_4$$

Граничные условия для потенциала  $\overset{\vee}{A}^*_{E}$  (магнитного типа) в соответствии с (7.14) можем представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_1 \left[ \overset{\vee}{A}^{*(1)}_1 + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} \right] &= \gamma'_2 \left[ \overset{\vee}{A}^{*(2)}_1 + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_1} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(2)} \right], \\ \gamma'_1 \left[ \overset{\vee}{A}^{*(1)}_2 + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} \right] &= \gamma'_2 \left[ \overset{\vee}{A}^{*(2)}_2 + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial l_2} \operatorname{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(2)} \right], \end{aligned} \right\} (7.22)_{1,2}$$

$$\frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(1)}_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(1)}_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3 = \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(2)}_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(2)}_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3, (7.22)_3$$

$$\frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(1)}_1 dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(1)}_3 dl_3)}{\partial l_1} dl_1 = \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(2)}_3 dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\overset{\vee}{A}^{*(2)}_3 dl_3)}{\partial l_1} dl_1, (7.22)_4$$

где в соответствии с (6.56)<sub>1</sub> (6.59),  $\gamma' = \gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$  – комплексная удельная электропроводность, а  $k^2 = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu \cdot \gamma'$  – квадрат волнового числа.

Существует мнение, что в случае гармонически меняющегося ЭМ поля влияние частоты и электромагнитных параметров различных однородных областей среды *всегда* сводится к влиянию волновых чисел  $k = (i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu \cdot \gamma')^{1/2}$  этих областей. Согласно (7.9) – (7.10), (7.17) – (7.22) в присутствии поверхностей разрыва магнитной проницаемости  $\mu$  на электромагнитное поле влияют не только (также в общем случае зависящие от  $\mu$ ) волновые числа  $k$ , но и магнитные проницаемости  $\mu$  этих (граничащих) областей. И, напротив, источники кулоновой составляющей  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  поля  $\mathbf{E}$  – электрические заряды не зависят от  $\mu$ . Это, например, индуцированные заряды в местах нарушения однородности следы по  $\gamma' = \gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$  (см. равенства (6.56''')) или заряды на концах разомкнутой линии стороннего тока; см. рис. 6.7, б и выражения (6.56'''), (7.30'').

Индексы "E" и "H", применявшиеся выше при обозначениях некоторых из электродинамических потенциалов, будем далее опускать.

Примеры применения электродинамических потенциалов электрического и магнитного типа при решении прямых задач для гармонически меняющегося ЭМ поля в моделях электрически анизотропной среды приведены в работе [Каринский, 2018].

В следующих параграфах этой главы рассмотрим несколько решений прямых задач теории гармонически меняющегося электромагнитного поля в моделях изотропной среды и некоторые результаты анализа этих решений.

### § 3. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

#### 1. Постановка задачи и её решение

Переменный электрический диполь представим элементом  $dl$  стороннего линейного тока  $I^{стп}=I$  с переменными зарядами  $\pm e$  на концах отрезка  $dl$  (рис. 7.1, а). В общем случае  $e=e_{плн}=e^{стп}+e_{зав}$  (см. раздел IV, § 5 главы шестой).

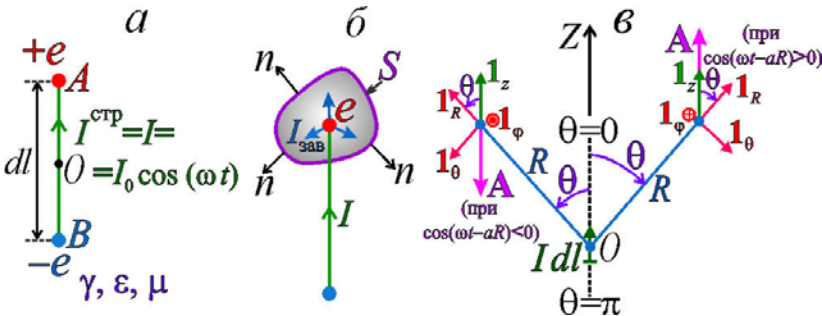


Рис. 7.1.

Переменный электрический диполь в безграничной однородной среде (а, б) и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  ЭМ поля при  $\cos(\omega t - aR) > 0$  и  $\cos(\omega t - aR) < 0$  (в)

В отличие от  $e_{зав}$  заряд  $e^{стп}$  зависит согласно (6.42)<sub>4</sub> только от тока  $I^{стп}$ . Выберем нулевую начальную фазу у величины  $I^{стп}$  и положим  $I^{стп}=I=I_0 \cdot \cos(\omega t)$ . При

применении комплексной записи ток  $\overset{\vee}{I}=I_0 \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ . Среда – безграничная

однородная, т. е. всюду  $\text{grad } \gamma = \nabla \gamma = 0$ ,  $\text{grad } \epsilon = 0$ ,  $\text{grad } \mu = 0$  и, следовательно,  $\text{grad } k = 0$ . Определим электромагнитное поле.

Применим «совмещенную» систему, координат  $R, \theta, \varphi; r, \varphi, z$  (рис. 7.1, в) с общим началом  $O$  в центре отрезка  $dl$  тока  $I$  и положительным направлением полярной оси (и оси  $Z$ ) по току  $I$  в момент  $t=0$ .

Введём электродинамический потенциал  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  электрического типа, пользуясь соотношениями (7.11)<sub>1,3</sub>:  $\overset{\vee}{\mathbf{H}} = \text{rot } \overset{\vee}{\mathbf{A}}$ ,

$$\overset{\vee}{\mathbf{E}} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \left[ \overset{\vee}{\mathbf{A}} + \left( 1/k^2 \right) \cdot \text{grad div } \overset{\vee}{\mathbf{A}} \right].$$

Вне диполя (при  $R > 0$ ) вектор  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  подчиняется уравнению (7.11)<sub>4</sub>. В соответствии с изложенным в § 1, 2 надо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим дополняющим условиям: 1) условию в бесконечности (7.16); 2) условию у особой точки  $O$  ( $R=0$ ), к получению которого переходим.

В соответствии со сказанным в разделе VI, § 5 главы шестой магнитное поле элемента  $I dl$  переменного тока при  $R \rightarrow 0$  в каждый момент времени должно совпадать с магнитным полем элемента  $I dl$  постоянного тока. Тогда согласно (5.27')<sub>1</sub>, (5.53) надо потребовать, чтобы при  $R \rightarrow 0$

$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2}$ . Можно убедиться, что это условие будет выполнено,

если для вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$ , связанного с полем  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  равенством (7.11)<sub>1</sub>, будет выполняться условие

$$\text{при } R \rightarrow 0 \quad \overset{\vee}{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{1}_z \cdot \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi \cdot R}, \quad (7.23)$$

где  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Согласно (7.23) вблизи диполя вектор  $\mathbf{A}$  коллинеарен оси  $Z$  и зависит лишь от расстояния  $R$  от диполя до точки наблюдения. Будем искать решение уравнения (7.11)<sub>4</sub> в предположении, что эти условия выполняются во всём

пространстве, т. е. комплексная амплитуда  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}_0(a)$  вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}(a, t) = \overset{\vee}{\mathbf{A}}_0(a) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_{0z}(R). \quad (7.24)$$

Тогда согласно (1.79'), (7.24) вместо (7.11)<sub>4</sub> получаем уравнение

$$\nabla^2 \overset{\vee}{A}_{0z} + k^2 \cdot \overset{\vee}{A}_{0z} = 0,$$

которое в соответствии с (1.66''), (7.24) можем записать в виде

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d \overset{\vee}{A}_{0z}}{dR} \right) + k^2 \cdot \overset{\vee}{A}_{0z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2}{dR^2} \left( R \cdot \overset{\vee}{A}_{0z} \right) + k^2 \cdot \left( R \cdot \overset{\vee}{A}_{0z} \right) = 0. \quad (7.25)$$

Очевидно, что общее решение уравнения (7.25) (обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка) имеет вид

$$\overset{\vee}{A}_{0z} = \frac{C_1 \cdot \exp(ikR)}{R} + \frac{C_2 \cdot \exp(-ikR)}{R}, \quad (7.26)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – множители, не зависящие от  $R$ .

Каждое из двух слагаемых в правой части (7.26) представляет, собой сферическую волну с центром в точке  $O$  (поверхности равных фаз – сферические). Эти слагаемые определяют две сферические волны: «расходящуюся» и «сходящуюся».

Так как волновое число  $k = a + i \cdot b$ , то согласно (6.59'), (7.26)

$$\overset{\vee}{A}_{0z} = (C_1/R) \cdot \exp(-bR) \cdot \exp(i \cdot aR) + (C_2/R) \cdot \exp(bR) \cdot \exp(-i \cdot aR), \quad \text{где } b \geq 0.$$

При  $b > 0$  и  $R \rightarrow \infty$  функция  $\exp(bR) \rightarrow \infty$ , поэтому для выполнения условия

(7.16) положим  $C_2 = 0$ . Условию (7.23) удовлетворим, положив  $C_1 = I \cdot dl / (4\pi)$ . Таким образом,



$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{A}_z &= \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i \cdot k R) = \frac{I_0 \cdot dl}{4\pi \cdot R} \cdot \exp[i \cdot (k R - \omega t)] = \\ &= \frac{I_0 \cdot dl}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(-b R) \cdot \exp[-i \cdot (\omega t - a R)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Выражения (7.24), (7.27) удовлетворяют уравнению (7.11)<sub>4</sub> и дополняющим условиям и, следовательно, являются решением рассматриваемой задачи для потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z$ .

Для перехода от потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  к векторам  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  предварительно выразим поле  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$ , в сферической системе координат. Как видно на рис. 7.1, в, при  $\overset{\vee}{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z$  в сферических координатах  $A_R = \overset{\vee}{A}_z \cdot \cos \theta$ ,  $A_\theta = -\overset{\vee}{A}_z \cdot \sin \theta$ ,  $A_\varphi = 0$ , т. е. согласно (7.27)

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{A}} &= \mathbf{1}_R \cdot A_R + \mathbf{1}_\theta \cdot A_\theta, \quad \overset{\vee}{A}_R = \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i \cdot k R), \\ \overset{\vee}{A}_\theta &= -\frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i \cdot k R). \end{aligned} \right\} \quad (7.27')$$

Применяя формулы (7.11)<sub>1</sub>, (1.27''), получаем

$$\overset{\vee}{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\varphi \cdot H_\varphi, \quad H_\varphi = \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi \cdot R^2} \cdot \sin \theta \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR).$$

Поле  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  можем определить, пользуясь либо выражением для поля  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$ , уравнением (6.5'') и формулой (1.27''), либо формулами (7.11)<sub>3</sub>, (7.27') (1.13''), (1.33''). В результате получаем следующие выражения для ненулевых компонент векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  в сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{H}_\varphi &= \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{E}_R &= \frac{1}{\gamma - i\omega\epsilon_a} \frac{2 \cdot \overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{E}_\theta &= \frac{1}{\gamma - i\omega\epsilon_a} \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot (1 - ikR - k^2 R^2) \cdot \exp(ikR). \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

В соответствии с (7.28) магнитное поле  $\overset{\vee}{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\varphi \cdot H_\varphi(R, \theta)$  имеет нечётную цилиндрическую симметрию относительно полярной оси и оси  $Z$  (см. рис. 7.1, в и рис. 1.18, б). Электрическое поле  $\overset{\vee}{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_R \cdot E_R(R, \theta) + \mathbf{1}_\theta \cdot E_\theta(R, \theta)$  – чётно - симметрично относительно этой оси (см. рис. 1.18, а).

В рассматриваемом примере поле  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  – сумма индукционной ( $\overset{\vee}{\mathbf{E}}^{\text{ЭМИ}}$ ) и

кулоновой ( $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$ ) составляющих. Возбудителем поля  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$  является переменное магнитное поле. Источники поля  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  – точечные заряды  $\pm e$  в местах обрыва линейного тока  $I^{\text{стр}}$  (см. рис. 7.1, а, б). В более общем случае (неоднородной среды) согласно (6.56''') источниками поля  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  были бы также заряды, индуцированные в местах нарушения однородности среды по  $\gamma' = \gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon$ . Возбудителями поля  $\mathbf{H}$  являются ток  $I^{\text{стр}}$  и (объёмные) токи, "поддерживаемые" полем  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ . В модели на рис. 7.1 поля  $\mathbf{E}^{\text{Кул}}$  зарядов  $\pm e$  и поддерживаемые ими токи (порознь) сферически симметричны. Такие токи не создают магнитного поля (см. выражение (5.25) в главе пятой).

## II. Поле в окрестности диполя

При  $R \rightarrow 0$  (или  $\omega \rightarrow 0$ ) произведение  $k \cdot R \rightarrow 0$  и вместо (7.28) получаем

$$H_{\phi} = \frac{I dl \cdot \sin \theta}{4\pi R^2}, \quad \overset{\vee}{E}_R = \frac{1}{\gamma - i \omega \epsilon_a} \frac{2 \cdot \overset{\vee}{I} dl \cdot \cos \theta}{4\pi R^3}, \quad \overset{\vee}{E}_{\theta} = \frac{1}{\gamma - i \omega \epsilon_a} \frac{\overset{\vee}{I} dl \cdot \cos \theta}{4\pi R^3}. \quad (7.29)$$

Очевидно, что определяемое выражением (7.29)<sub>1</sub> магнитное поле в любой момент времени совпадает с магнитным полем элемента  $I dl$  постоянного электрического тока. Это обстоятельство послужило основой при формулировке условия (7.23), см. (5.53).

Покажем, что выражения (7.29)<sub>2,3</sub> определяют электрическое поле переменного электрического диполя в квазипостоянном приближении, т. е. такое поле  $\mathbf{E}$ , возбудителями (источниками) которого являются (полные) электрические заряды, причём это поле синхронно меняется с изменением во времени его возбудителей (см. вступление к § 1 главы шестой).

Преобразуем некоторые выражения, выведенные в § 4, 5 главы шестой. Взяв дивергенцию от левой и правой частей (6.28) в соответствии с (1.74), (6.42) – (6.42'') получаем

$$\text{div } \mathbf{j}_{\text{зав}} = \text{div} \left( \gamma \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\text{div } \mathbf{j}^{\text{стр}} = \frac{\partial \delta^{\text{стр}}}{\partial t}. \quad (7.29')$$

В случае гармонически меняющегося поля согласно (6.56')<sub>1</sub> (при временном факторе  $\exp(-i \cdot \omega t)$ ) выражения (6.42), (7.29') принимают вид

$$\text{div } \overset{\vee}{\mathbf{j}}^{\text{стр}} = i \cdot \omega \cdot \overset{\vee}{\delta}^{\text{стр}}, \quad \text{div} \left[ (\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a) \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} \right] = \text{div} \left( \gamma' \cdot \overset{\vee}{\mathbf{E}} \right) = -\text{div } \overset{\vee}{\mathbf{j}}^{\text{стр}}. \quad (7.30)$$

где  $\gamma'$  – комплексная удельная электропроводность.

Для среды, однородной по электрическим параметрам ( $\text{grad } \gamma = \nabla \gamma = 0$ ,  $\text{grad } \epsilon = \nabla \epsilon = 0$ ), справедливы уравнения (6.56''), (6.56'''). Из (6.56''), пользуясь (7.30)<sub>2</sub>, получаем

$$\overset{\vee}{\delta}_{\text{плн}} = -\frac{\epsilon_0}{\gamma'} \cdot \text{div } \overset{\vee}{\mathbf{j}}^{\text{стр}} = -\frac{\epsilon_0}{\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a} \cdot \text{div } \overset{\vee}{\mathbf{j}}^{\text{стр}} = -\frac{i \cdot \omega \cdot \epsilon_0}{\gamma'} \cdot \overset{\vee}{\delta}^{\text{стр}} = \frac{1}{\epsilon'} \cdot \overset{\vee}{\delta}^{\text{стр}}, \quad (7.30')$$

где  $\epsilon'$  – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Для изображённой на рис. 7.1, б замкнутой поверхности  $S$  из (6.56''') следует:

$$\overset{\vee}{e} = \overset{\vee}{e}_{\text{плн}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \overset{\vee}{I}^{\text{стр}}}{\gamma'} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \overset{\vee}{I}^{\text{стр}}}{\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a} = -\frac{\overset{\vee}{I}^{\text{стр}}}{i \cdot \omega \cdot \varepsilon'} = \frac{\overset{\vee}{e}^{\text{стр}}}{\varepsilon'}, \quad (7.30'')$$

$$\text{или } \overset{\vee}{I}^{\text{стр}} = \frac{\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \cdot \overset{\vee}{e} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon' \cdot \overset{\vee}{e}. \quad (7.31)$$

Учтено, что при выбранном положительном направлении  $\overset{\vee}{I}^{\text{стр}}$  этот ток направлен внутрь области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S[V]$  (поверхностью  $S$  на рис. 7.1, б).

Пользуясь равенствами (6.56), (7.31) и выделяя действительные части комплексных величин, вместо выражений (7.29)<sub>2,3</sub> получаем

$$E_R = \frac{2p \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3}, \quad E_\theta = \frac{p \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3}, \quad (7.29'')$$

где  $\mathbf{p} = \mathbf{1}_z \cdot p = \mathbf{1}_z \cdot e \cdot dl$  – момент электрического диполя.

Таким образом, согласно (2.57), (2.114)<sub>1</sub>, (7.29'') электрическое поле, определяемое выражениями (7.29)<sub>2,3</sub>, в каждый момент времени совпадает с полем постоянного электрического диполя (зарядов  $e$  и  $-e$  на концах отрезка  $dl$ ).

Величина зарядов  $\pm e$  зависит от тока  $I = I^{\text{стр}}$  (в частности, от его частоты) и электрических параметров среды ( $\varepsilon, \gamma = 1/\rho$ ). Согласно (7.30'')

$$\overset{\vee}{e} = \frac{\gamma + i\omega\varepsilon_a}{\gamma^2 + \omega^2\varepsilon_a^2} \varepsilon_0 \overset{\vee}{I}^{\text{стр}} = \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2\varepsilon_a^2} \varepsilon_0 I_0 \exp[-i\omega t] + \frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma^2 + \omega^2\varepsilon_a^2} \varepsilon_0 I_0 \exp[-i(\omega t - \pi/2)].$$

Следовательно, в действительной форме при  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$  имеем

$$e = \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2 + \omega^2\varepsilon_a^2} \cdot [\gamma \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t) + \omega\varepsilon_a \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t)]. \quad (7.31')$$

В частных случаях выражение (7.31') можно упростить. Если элемент  $I dl$  гармонически меняющегося тока находится в непроводящей среде ( $\gamma=0$ ) или в вакууме, то полный электрический заряд

$$e = \frac{I_0}{\omega\varepsilon} \cdot \sin(\omega t), \quad (7.31'')$$

следовательно, изменение заряда  $e$  со временем опережает по фазе изменение тока  $I$  на  $\pi/2$ .

В случае квазистационарного электромагнитного поля ( $\omega \cdot \varepsilon_a \ll \gamma$ ) из (7.31') получаем:

$$e \approx \varepsilon_0 \cdot I / \gamma = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (7.31''')$$

в соответствии с (4.81). То есть в этом случае заряд  $e$  меняется со временем синфазно с током  $I$  и в каждый момент времени связь величин  $e, I$  – такая же, как в случае стационарного поля  $\mathbf{E}$  (рис. 7.2). В соответствии с (7.29)<sub>1</sub> в

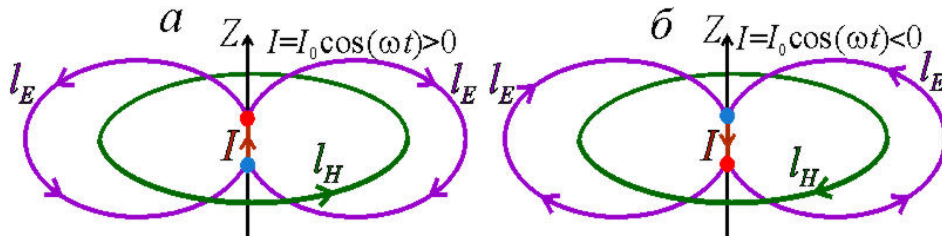


Рис. 7.2.

Сторонний ток  $I$  и векторные линии  $l_E, l_H$  в окрестности переменного электрического диполя при  $\omega \cdot \epsilon_a \ll \gamma$ .

$I = I_0 \cdot \cos(\omega t) > 0$  (а) и  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t) < 0$  (б)

окрестности переменного электрического диполя, при  $R \rightarrow 0$ , ненулевая компонента  $H_\phi$  поля  $\mathbf{H}$  в любом случае меняется синфазно со сторонним

током  $I$ .

### III. Поле в ближней и дальней зонах

Как будет видно из дальнейшего изложения, существенные различия присущи переменным ЭМ полям на небольших расстояниях от их сторонних возбудителей и вдали от них. В рассматриваемом примере (переменный электрический диполь в однородной среде) двум таким случаям отвечают неравенства  $R \ll 1/|k|$  и  $R \gg 1/|k|$ . Эти области пространства называют соответственно ближней зоной и дальней зоной. Остальную часть пространства называют промежуточной зоной.

В ближней зоне (безразмерный) параметр  $|k| \cdot R \ll 1$  (область малого параметра). Применяя разложение в степенной ряд ( $\exp(z) = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + \dots$ )

$$\exp(i \cdot k \cdot R) = 1 + i \cdot k \cdot R - k^2 \cdot R^2 / 2 - i \cdot k^3 \cdot R^3 / 6 + k^4 \cdot R^4 / 24 + \dots \quad (7.31''')$$

и пренебрегая малыми величинами произведений  $k \cdot R$  выше второго порядка, получаем, например, вместо (7.28)<sub>1,2</sub>

$$\check{H}_\phi = \frac{\check{I} \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot \left( 1 + \frac{k^2 R^2}{2} \right), \quad \check{E}_R = \frac{2 \check{I} \cdot dl \cdot \cos \theta}{(\gamma - i\omega\epsilon_a) \cdot 4\pi \cdot R^3} \cdot \left( 1 + \frac{k^2 R^2}{2} \right). \quad (7.32)$$

В случае квазистационарного поля ( $(\omega \cdot \epsilon_a / \gamma) \ll 1, k^2 \approx i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a$ ) согласно (6.61'') вместо (7.32)<sub>1</sub> имеем

$$\check{H}_\phi = \frac{\check{I} \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot \left( 1 + i \cdot \frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot R^2}{2} \right),$$

откуда, переходя от комплексной к "действительной" записи, получаем

$$H_\phi = \left\{ \frac{I_0 dl \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \right\} \cdot \cos(\omega t) + \left\{ \frac{I_0 dl \sin \theta}{8\pi} \cdot \omega \gamma \mu_a \right\} \cdot \sin(\omega t). \quad (7.32')$$

Таким образом, в соответствии с (7.32') при  $|k| \cdot R \ll 1$  и  $(\omega \cdot \epsilon_a / \gamma) \ll 1$  ненулевая компонента  $H_\phi$  магнитного поля  $\mathbf{H}$  – сумма двух составляющих с начальными фазами 0 и  $-\pi/2$ . Первое слагаемое в правой части выражения (7.32') для  $H_\phi$  меняется со временем синхронно с током  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$  и не

зависит от параметров среды; второе – пропорционально  $\sin(\omega t)$ , т. е. опережает по фазе ток  $I$  на  $\pi/2$ , а его амплитуда пропорциональна частоте  $f=\omega/(2\pi)$  и параметрам  $\gamma$  и  $\mu$  среды. Кроме того, (при  $R \ll 1/|k|$ ) согласно (7.32') эта (меняющаяся со временем как  $\sin(\omega t)$ ) составляющая магнитного поля не зависит от расстояния  $R$  до переменного электрического диполя.

Первое слагаемое в правой части (7.32') соответствует (7.29)<sub>1</sub> и определяет первичную часть магнитного поля (первичное магнитное поле) переменного электрического диполя – элемента  $dl$  гармонически меняющегося тока  $I$ . Остальную (вторичную) часть этого поля (вторичное поле) в ближней зоне при  $\omega \cdot \epsilon_a \ll \gamma$  приближённо определяет второе слагаемое в правой части (7.32'). Аналогично можно разделять на первичную и вторичную части поля других возбуждателей (см. раздел II, § 4).

Обратимся теперь к выражению (7.32)<sub>2</sub> для компоненты  $\overset{\vee}{E}_R$  в ближней зоне. Первому слагаемому в правой части этого равенства отвечает компонента кулонова поля в (7.29)<sub>2</sub>. Второе слагаемое можем представить в виде:

$$\overset{\vee}{E}_R^{\text{ЭМИ}} = \frac{k^2}{\gamma - i\omega\epsilon_a} \cdot \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \cos\theta}{4\pi \cdot R} = i\omega\mu_a \cdot \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \cos\theta}{4\pi \cdot R}, \text{ а в действительной форме}$$

$$E_R^{\text{ЭМИ}} = \omega\mu_a \cdot \frac{I_0 \cdot dl \cdot \cos\theta}{4\pi \cdot R} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.32'')$$

Здесь  $E_R^{\text{ЭМИ}}$  – компонента индукционного поля  $\mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ . Согласно (7.32'') при  $|k| \cdot R \ll 1$  это поле не зависит от электрических параметров среды ( $\gamma, \epsilon$ ), а его возбудителем в соответствии с (6.55)<sub>II</sub> является первичное магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{II}}$  отрезка  $dl$  стороннего переменного тока  $I=I_0 \cdot \cos(\omega t)$ . Поле  $\mathbf{H}^{\text{II}}=\mathbf{1}_\varphi \cdot H_\varphi^{\text{II}}$  определяет первое слагаемое в правой части выражения (7.32').

В дальней (или волновой) зоне параметр  $|k| \cdot R \gg 1$ . Из (7.28) получаем

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{H}_\varphi &= ik \cdot \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \sin\theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(ikR), & \overset{\vee}{E}_R &= \frac{\omega\mu_a}{k} \cdot \frac{2 \cdot \overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \cos\theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{E}_\theta &= -i \cdot \omega\mu_a \cdot \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl \cdot \sin\theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(ikR). \end{aligned} \right\} (7.33)$$

Если исключить из рассмотрения окрестность полярной оси (при  $\theta=0$  или  $\theta=\pi$  компонента  $E_\theta=0$ ), то в дальней зоне согласно (7.33)<sub>2,3</sub> отношение  $(|E_R|/|E_\theta|) \ll 1$  и  $\mathbf{E}=\mathbf{1}_\theta \cdot E_\theta(R, \theta)$ . Для импеданса  $Z$  ( $Z=\overset{\vee}{E}_\theta/\overset{\vee}{H}_\varphi$ ) из (7.33)<sub>1,3</sub> получаем:

$$Z = \frac{\omega \cdot \mu_a}{k} = \frac{\omega \cdot \mu_a}{\sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot (\gamma - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a)}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\omega \cdot \epsilon_a + i \cdot \gamma}},$$

что совпадает с выражением (6.71) для импеданса плоской гармонической ЭМ волны.

Вектор Умова – Пойнтинга в соответствии с (6.21)

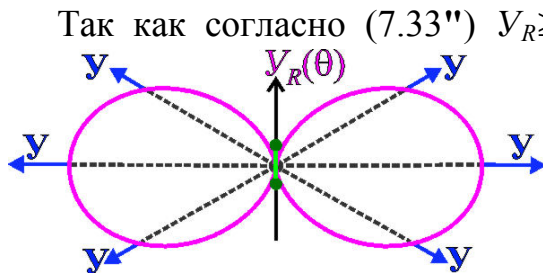
$\mathbf{Y}=[\mathbf{E} \ \mathbf{H}]=[\mathbf{1}_\theta \ \mathbf{1}_\varphi] \cdot E_\theta \cdot H_\varphi = \mathbf{1}_R \cdot Y_R$ . Но определить компоненту  $Y_R = E_\theta \cdot H_\varphi$  как произведение выражений (7.33)<sub>3,1</sub> для компонент  $\overset{\vee}{E}_\theta$ ,  $\overset{\vee}{H}_\varphi$  в комплексной форме мы не можем (нелинейная операция). Чтобы не обременять возможного читателя "громоздкими" преобразованиями, рассмотрим частный случай. В изоляторе (при  $\gamma=0$ ) из (7.33)<sub>3,1</sub>, переходя от комплексной записи к действительной записи, не сложно получить выражения:

$$H_\varphi = -C \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sin \theta}{R} \sin(\omega t - a R), \quad E_\theta = -C \frac{\omega \mu_a \sin \theta}{R} \sin(\omega t - a R), \quad (7.33')$$

где  $C=(I_0 \cdot dl)/4\pi$ .

Из (7.33') следует, что

$$\mathbf{Y}=\mathbf{1}_R \cdot Y_R, \quad \text{где } Y_R = C^2 \cdot \frac{\omega^2 \mu_a \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \cdot \sin^2 \theta}{R^2} \cdot \sin^2(\omega t - a R). \quad (7.33'')$$



**Рис. 7.3.**

Переменный электрический диполь. Зависимость  $Y_R$  от угла  $\theta$  (при  $R=\text{const}$  и  $t=\text{const}$ ).  
Дальняя зона; изолятор

Так как согласно (7.33'')  $Y_R \geq 0$  определяемое (при  $\gamma=0$ ) выражениями (7.33'), (7.33'') электромагнитное поле представляет собой сферическую волну, распространяющуюся в направлении  $\mathbf{1}_R$  (рис. 7.3). Синфазные поверхности ненулевых компонент  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$  векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  – сферические с центром в точке  $O$ . Амплитуда ненулевой компоненты  $Y_R$  вектора  $\mathbf{Y}$  пропорциональна  $\sin^2 \theta$  и обратно пропорциональна  $R^2$  (подробнее см. [Тамм, 1976], с. 464 – 468).

## § 4. ПЕРЕМЕННЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Переменным магнитным диполем может служить элементарный замкнутый контур  $l$  линейного тока  $I$ , меняющегося со временем (или "катушка" из некоторого числа таких контуров ("витков")). Как и в § 3 будем полагать, что среда – всюду однородна по параметрам  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ :  $\nabla \gamma = \text{grad } \gamma = 0$ ,  $\text{grad } \epsilon = 0$ ,  $\text{grad } \mu = 0$ , а сторонний ток  $I^{\text{стр}} = I$  – гармонически меняется со временем  $t$  с круговой частотой  $\omega$ , т. е.  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$ .

Применяя комплексную запись и полагая  $\overset{\vee}{I} = I_0 \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ , определим момент магнитного диполя аналогично (5.3')

См. замечание 5 в разделе I, § 3 главы пятой и раздел IV, § 3 главы пятой.

$$\mathbf{M} = \text{Re } \overset{\vee}{\mathbf{M}}, \quad \overset{\vee}{\mathbf{M}} = I \cdot \overset{\vee}{\mathbf{dS}} = I_0 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{dS}} \cdot \exp(-i \cdot \omega t) = \overset{\vee}{\mathbf{M}}_0 \cdot \exp(-i \cdot \omega t), \quad (7.34)$$

где  $dS$  – площадка, ограниченная контуром  $l$ ; нормаль  $\mathbf{n}$  к  $dS$  (и  $\overset{\vee}{\mathbf{dS}} = \mathbf{1}_n \cdot dS$ ) образует правовинтовую систему с направлением тока  $I$  в момент  $t=0$  (рис. 7.4, а), а  $\overset{\vee}{\mathbf{M}}_0 = I_0 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{dS}}$ . Определим электромагнитное поле.



## I. Постановка и решение задачи

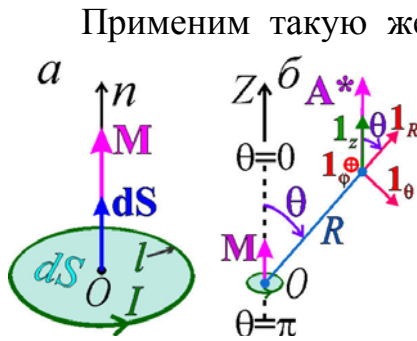


Рис. 7.4.

Магнитный диполь

Применим такую же систему координат  $(R, \theta, \varphi$  и  $r, \varphi, z)$ , как и при решении предыдущей задачи (рис. 7.4, б). Поместим начало координат  $O$  в центр магнитного диполя и направим полярную ось и ось  $Z$  по нормали  $n$  – по направлению момента  $\mathbf{M}$  в момент времени  $t=0$ , т. е.  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_z \cdot M_z$ .

При  $R > 0$  векторный потенциал магнитного типа  $\mathbf{A}^*$ , связанный с векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

равенствами (7.14)<sub>1,3</sub>:  $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}^*$ ,

$\mathbf{H} = (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \left[ \mathbf{A}^* + \left(1/k^2\right) \cdot \text{grad div } \mathbf{A}^* \right]$ , должен удовлетворять

однородному уравнению Гельмгольца (7.14)<sub>4</sub> и двум дополняющим условиям: условию в бесконечности (7.16) и условию у особой точки  $R=0$ . Согласно (5.31)<sub>1</sub> для магнитного поля, возбуждаемого постоянным линейным током по замкнутому контуру элементарных размеров, в немагнитной среде справедливы выражения  $(\mathbf{B}/\mu_0) = -\text{grad } U_I$ ,  $U_I = (\mathbf{M} \mathbf{L}_{qa}) / (4\pi \cdot L_{qa}^3)$ . Тогда в соответствии с изложенным в разделе I, § 6 главы пятой магнитное поле такого же возбудителя в безграничной однородной среде определяет формула

$$(\mathbf{B}/(\mu_0 \cdot \mu)) = \mathbf{H} = -\text{grad} [(\mathbf{M} \mathbf{L}_{qa}) / (4\pi \cdot L_{qa}^3)].$$

Потребовав, чтобы вблизи переменного магнитного диполя электромагнитное поле было квазипостоянным (см. раздел VI, § 5 главы шестой), получаем:

$$\text{при } R \rightarrow 0 \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{1}_R \cdot \frac{2M_z \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R^3} + \mathbf{1}_\theta \cdot \frac{M_z \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^3}.$$

Пользуясь (7.14)<sub>3</sub>, (1.13"), (1.33"), можно убедиться в том, что это условие будет выполнено, если

$$\text{при } R \rightarrow 0 \quad \mathbf{A}^* \rightarrow (\mathbf{1}_R \cdot \cos \theta - \mathbf{1}_\theta \cdot \sin \theta) \cdot \frac{i \omega \mu_a \cdot M_z}{4\pi \cdot R} = \mathbf{1}_z \cdot \frac{i \omega \mu_a \cdot M_z}{4\pi \cdot R} \quad (7.35)$$

(см. рис. 7.4, б).

Условием (7.16), (7.35) удовлетворяет следующее решение уравнения (7.14)<sub>4</sub>:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{1}_z \cdot A_z^*, & A_z^* &= \frac{i \omega \mu_a \cdot M_z}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(ikR) = \\ &= \frac{\omega \mu_a \cdot I_0 dS}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(-bR) \cdot \exp\left[-i\left(\omega t - aR - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Переходя к компонентам  $\overset{\vee}{A}_R^*$  и  $\overset{\vee}{A}_\theta^*$  вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  и выполняя дифференцирование в формулах (7.14)<sub>1,3</sub>, получаем следующие выражения для ненулевых компонент векторов  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  в сферической, системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{E}_\varphi &= \frac{i\omega\mu_a \cdot \overset{\vee}{M}_z \cdot \sin\theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{H}_R &= \frac{2 \cdot \overset{\vee}{M}_z \cdot \cos\theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{H}_\theta &= \frac{\overset{\vee}{M}_z \cdot \sin\theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot (1 - ikR - k^2R^2) \cdot \exp(ikR). \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Согласно (7.37) при возбуждении электромагнитного поля в безграничной однородной среде переменным магнитным диполем (в показанной на рис. 7.4, б сферической системе координат) электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi(R, \theta)$ , а магнитное поле  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_R \cdot H_R(R, \theta) + \mathbf{1}_\theta \cdot H_\theta(R, \theta)$ . Следовательно, поле  $\mathbf{E}$  имеет нечётную цилиндрическую симметрию, а поле  $\mathbf{H}$  – чётную цилиндрическую симметрию (см. рис. 1.18, а, б).

Определяемое выражением (7.37)<sub>1</sub> поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ЭМИ}} = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi^{\text{ЭМИ}}$ . Поле  $\mathbf{E}^{\text{Кул}} = 0$  так как ток  $I^{\text{стп}}$  – замкнут ( $\text{div } \mathbf{j}^{\text{стп}} = 0$ ) и нет мест нарушения однородности среды по  $\gamma'$  (см. (6.56''), (6.56''')).

Из выражения (7.37)<sub>2</sub>, принимая во внимание, что  $R \cdot \cos\theta = z$  (см. рис. 7.4, б), на оси  $Z$  координата  $R = |z|$ , а на отрицательной полуоси  $Z$  орт  $\mathbf{1}_z \uparrow \downarrow \mathbf{1}_R$ , для магнитного поля на оси переменного магнитного диполя получаем:

$$\text{на оси } Z \quad \overset{\vee}{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{H}_z, \quad \overset{\vee}{H}_z = \frac{\overset{\vee}{M}_z}{2\pi |z|^3} \cdot (1 - ik|z|) \cdot \exp(ik|z|).$$

В экваториальной плоскости диполя согласно (7.37)<sub>1,3</sub>

$$\text{при } \theta = \pi/2 \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{E}} &= \mathbf{1}_\varphi \cdot \overset{\vee}{E}_\varphi, \quad \overset{\vee}{E}_\varphi = i\omega\mu_a \cdot \frac{\overset{\vee}{M}_z}{4\pi R^2} \cdot (1 - ikR) \cdot \exp(ikR), \\ \overset{\vee}{\mathbf{H}} &= \mathbf{1}_\theta \cdot \overset{\vee}{H}_\theta, \quad \overset{\vee}{H}_\theta = \frac{\overset{\vee}{M}_z}{4\pi R^3} \cdot (1 - ikR - k^2R^2) \cdot \exp(ikR). \end{aligned} \right.$$

В соответствии с (7.37) ЭМ поле переменного магнитного диполя в однородной среде в значительной степени зависит от произведения  $k \cdot R$ . Рассмотрим частные случаи.

## II. Поле в ближней и дальней зонах

В ближней зоне  $|k \cdot R| \ll 1$ . Пользуясь разложением экспоненты в степенной ряд (см. (7.31''')) и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными  $(k \cdot R)^3$ ,  $(k \cdot R)^4$ , ..., имеем аналогично (7.32)

$$\left. \begin{aligned} \check{E}_\varphi &= \frac{i \omega \mu_a \cdot \check{M}_z \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot \left( 1 + \frac{k^2 R^2}{2} \right), \\ \check{H}_R &= \frac{2 \cdot \check{M}_z \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot \left( 1 + \frac{k^2 R^2}{2} \right), \quad \check{H}_\theta = \frac{\check{M}_z \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^3} \cdot \left( 1 - \frac{k^2 R^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} (7.38)$$

В предельном случае, при  $k \cdot R \rightarrow 0$ , переходя к действительной форме записи, получаем для возбуждаемого контуром тока  $I$  первичного магнитного поля:

$$\text{при } k \cdot R \rightarrow 0 \quad H_R = \frac{2 \cdot I_0 dS \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R^3} \cos(\omega t), \quad H_\theta = \frac{I_0 dS \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^3} \cos(\omega t).$$

То есть компоненты  $H_R$  и  $H_\theta$  вектора  $\mathbf{H}$  меняются синхронно с током  $I$  (и ненулевой компонентой  $M_z$  вектора  $\mathbf{M}$ ). Так как  $i = \exp(i \cdot \pi/2)$  компонента  $E_\varphi$  поля  $\mathbf{E}$  отличается по фазе от тока  $I$  на  $\pi/2$ . При  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$  компонента  $E_\varphi$  меняется со временем как  $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$ . В действительной форме из (7.38)<sub>1</sub> получаем:

$$\text{при } k \cdot R \rightarrow 0 \quad E_\varphi = \omega \mu_a \cdot \frac{I_0 dS \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R^2} \sin(\omega t).$$

Рассмотрим подробнее электромагнитное поле в ближней зоне в квазистационарном случае, когда  $(\omega \cdot \varepsilon_a / \gamma) \ll 1$ . Положим в соответствии с

(6.61''')  $k^2 = i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a$ . Учитывая выражение (7.34)<sub>2</sub> для  $\check{\mathbf{M}}$  и выделяя действительные части комплексных величин, получаем из (7.38):

$$E_\varphi = E_\varphi^0 + E_\varphi^1, \quad H_R = H_R^0 + H_R^1, \quad H_\theta = H_\theta^0 + H_\theta^1, \quad (7.39)$$

где

$$E_\varphi^0 = \omega \mu_a \frac{M_0 \sin \theta}{4\pi R^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad E_\varphi^1 = \omega^2 \gamma \mu_a^2 \frac{M_0 \sin \theta}{8\pi} \cdot \cos(\omega t - \pi), \quad (7.39')$$

$$H_R^0 = \frac{M_0 \cos \theta}{2\pi R^3} \cdot \cos(\omega t), \quad H_R^1 = \omega \gamma \mu_a \frac{M_0 \cos \theta}{4\pi R} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.39'')$$

$$H_\theta^0 = \frac{M_0 \sin \theta}{4\pi R^3} \cdot \cos(\omega t), \quad H_\theta^1 = \omega \gamma \mu_a \frac{-M_0 \sin \theta}{8\pi R} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.39''')$$

Компоненты, определяемые формулами (7.39') – (7.39'''), имеют разные начальные фазы и по-разному зависят от  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ , что может быть истолковано на основе следующих представлений. Составляющие  $H_R^0$ ,  $H_\theta^0$  – компоненты первичного поля  $\mathbf{H}^0$ , создаваемого током  $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$  по закону

Био – Савара – Лапласа. Первичное поле  $\mathbf{H}^0$  переменного магнитного диполя иногда называют *прямым полем*. Поэтому эти компоненты синфазны с током  $I$  и не зависят от  $\gamma$  и  $\mu$ . По закону электромагнитной индукции переменное поле  $\mathbf{H}^0$  возбуждает электрическое поле  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi^0$ . В соответствии, с (6.55)<sub>II</sub> величина  $E_\varphi^0$  пропорциональна  $\omega$ ,  $\mu$  и опережает по фазе компоненты  $H_R^0$  и  $H_\theta^0$  на  $\pi/2$ . Поле  $\mathbf{E}^0$  вызывает в среде (индукционные, вихревые) токи с плотностью  $\mathbf{j}^0 = \gamma \cdot \mathbf{E}^0$ , пропорциональной  $\omega$ ,  $\gamma$  и  $\mu$ :

$$\mathbf{j}^0 = \gamma \cdot \mathbf{E}^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot \gamma \cdot E_\varphi^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot j_\varphi^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot \omega \gamma \mu_a \frac{M_0 \sin \theta}{4\pi R^2} \cdot \cos(\omega t - \pi/2).$$

Эти токи согласно уравнению (6.33)<sub>2</sub> создают магнитное поле  $\mathbf{H}^1$  с компонентами  $H_R^1$  и  $H_\theta^1$ , которые согласно (7.39'')<sub>2</sub>, (7.39''')<sub>2</sub>, как и величина  $j_\varphi^0$  пропорциональны  $\omega$ ,  $\gamma$  и  $\mu$ . Поле  $\mathbf{H}^1$  в свою очередь в соответствии с (6.55)<sub>II</sub> возбуждает электрическое поле  $\mathbf{E}^1 = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi^1$ . Величина  $E_\varphi^1$  в (7.39')<sub>2</sub> пропорциональна произведению  $(\omega \cdot \gamma \cdot \mu) \cdot (\omega \cdot \mu)$  и опережает по фазе ток  $I$  в контуре  $l$  на  $\pi = \pi/2 + \pi/2$ .

В дальней зоне ( $|k \cdot R| \gg 1$ ) аналогично (7.33) из (7.37) получаем

$$\left. \begin{aligned} \check{E}_\varphi &= \omega \mu_a k \cdot \frac{\check{M}_z \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i k R), \\ \check{H}_R &= -i k \cdot \frac{2 \cdot \check{M}_z \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot R^2} \cdot \exp(i k R), \quad \check{H}_\theta = -k^2 \cdot \frac{\check{M}_z \cdot \sin \theta}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i k R). \end{aligned} \right\} (7.40)$$

Если  $|k \cdot R| \gg 1$  (точнее  $|k \cdot R| \gg 2 \cdot |\text{ctg } \theta|$ ), то  $|H_R| \ll |H_\theta|$ , и магнитное поле  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\theta \cdot H_\theta$ . Из (7.40)<sub>1,3</sub> для импеданса ( $Z = \check{E}_{\varphi 0} / \check{H}_{\theta 0}$ ), получаем:  $Z = -(\omega \cdot \mu_a / k)$ . В этом выражении волновое сопротивление  $Z$  отличается знаком от импеданса, определяемого равенством (6.71), а также от приведенного в разделе III, § 3 выражения для  $Z$  в случае, когда сторонним возбудителем ЭМ поля является переменный электрический диполь. Это связано с тем, что векторы  $\mathbf{1}_\varphi$ ,  $\mathbf{1}_\theta$  и  $\mathbf{1}_R$  образуют левую систему (тройку), а векторы  $\mathbf{1}_x$ ,  $\mathbf{1}_y$  и  $\mathbf{1}_z$  или  $\mathbf{1}_\theta$ ,  $\mathbf{1}_\varphi$  и  $\mathbf{1}_R$  – правую систему (см. раздел III, § 1 главы первой и **рис. 7.1, в**, **рис. 7.4, б**).

## § 5. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ

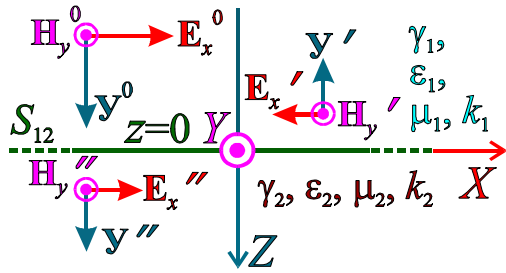
### I. Постановка и решение задачи

Пусть плоская гармоническая (с круговой частотой  $\omega$ ) линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в однородной среде, свойства которой характеризуют параметры  $\gamma_1$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ . Введем декартову систему координат с осью  $Z$  по направлению распространения волны (**рис. 7.5**). Тогда, выбрав соответствующие направления осей  $X$ ,  $Y$ , согласно (6.70), (6.70') можем положить

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{E}}^0 &= \mathbf{1}_x \cdot \check{E}_x^0, \quad \check{\mathbf{H}}^0 = \mathbf{1}_y \cdot \check{H}_y^0, \quad \check{E}_x^0 = \check{E}_x^0(0) \cdot \exp(ik_1 z), \\ \check{H}_y^0 &= \check{H}_y^0(0) \cdot \exp(ik_1 z) = \frac{k_1}{\omega \mu_0 \mu_1} \cdot \check{E}_x^0(0) \cdot \exp(ik_1 z), \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

где  $\check{E}_x^0(0)$  и  $\check{H}_y^0(0)$  – значения  $\check{E}_x^0$  и  $\check{H}_y^0$  в плоскости  $z=0$ , а волновое число  $k_1 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1 + i \omega \gamma_1 \mu_0 \mu_1} = \sqrt{i \omega \mu_0 \mu_1 (\gamma_1 - i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1)}$ .

Определяемое выражениями (7.41) электромагнитное поле полагаем заданным. Будем считать, что его независимые возбудители находятся в плоскости  $z=-\infty$ .



**Рис. 7.5.**

Нормальное падение плоской ЭМ волны на границу  $S_{12}$

Допустим теперь, что эти возбудители поля остались прежними, но среда в полупространстве  $z>0$  заменена средой с параметрами  $\gamma_2$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\mu_2$ , т. е. плоскость  $z=0$  – граница  $S_{12}$ , разделяющая пространство на два полупространства:  $V_1$  и  $V_2$  с порознь однородными средами. В этом случае

поле, определяемое выражениями (7.41), следует рассматривать как электромагнитную волну, падающую на границу  $S_{12}$  по направлению, нормальному к этой границе.

Определим электромагнитное поле в полупространствах  $V_1$  и  $V_2$ , удовлетворяющее условиям (7.8) или, проще, условиям (7.16') – непрерывности тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границе  $S_{12}$ . Это означает, что для определяемого выражениями (7.41) электромагнитного поля

$$\text{при } z=0 \quad E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad H_y^{(1)} = H_y^{(2)}. \quad (7.41')$$

Будем искать решение задачи (выражения для суммарного ЭМ поля в присутствии границы  $S_{12}$ ) в полупространствах  $V_{1,2}$  в следующем виде:

$$\check{\mathbf{E}}^{(1,2)} = \mathbf{1}_x \cdot \check{E}_x^{(1,2)}, \quad \check{\mathbf{H}}^{(1,2)} = \mathbf{1}_y \cdot \check{H}_y^{(1,2)}, \quad (7.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \check{E}_x^{(1)} &= \check{E}_x^0 + \check{E}_x' = \check{E}_x^0(0) \cdot [\exp(ik_1 z) + v_{12} \cdot \exp(-ik_1 z)], \\ \check{H}_y^{(1)} &= \check{H}_y^0 + \check{H}_y' = \check{E}_x^0(0) \cdot \frac{k_1}{\omega \mu_0 \mu_1} \cdot [\exp(ik_1 z) - v_{12} \cdot \exp(-ik_1 z)], \end{aligned} \right\} \quad (7.42')$$

$$\left. \begin{aligned} \check{E}_x^{(2)} &= \check{E}_x'' = \check{E}_x^0(0) \cdot w_{12} \cdot \exp(ik_2 z), \\ \check{H}_y^{(2)} &= \check{H}_y'' = \check{E}_x^0(0) \cdot \frac{k_2}{\omega \mu_0 \mu_2} \cdot w_{12} \cdot \exp(ik_2 z), \end{aligned} \right\} \quad (7.42'')$$

где  $v_{12}, w_{12}$  – множители, подлежащие определению.

Согласно (7.42) – (7.42'') в полупространстве  $V_1$  ищем решение задачи в виде суммы двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу, а в полупространстве  $V_2$  – в виде одной плоской волны, имеющей то же направление распространения, что и падающая волна. При записи (7.42'), (7.42'') учитывалось, что для плоской электромагнитной волны, удовлетворяющей условиям (7.42) и распространяющейся в однородной среде в направлении увеличения координаты  $z$  (по оси  $Z$  или по координатной линии  $l_z$ ), согласно (6.70')

$$\check{H}_y = (k/(\omega \mu_0 \mu)) \cdot \check{E}_x.$$

Для такой же волны, но распространяющейся в направлении уменьшения координаты  $z$ ,

$$\check{H}_y = -(k/(\omega \mu_0 \mu)) \cdot \check{E}_x.$$

Требую, чтобы в соответствии с (7.8) для комплексных величин  $\check{E}_x, \check{H}_y$  при  $z=0$  выполнялись условия (7.41'), т. е. условия непрерывности тангенциальных (к границе  $S_{12}$ ) компонент  $E_x, H_y$ , получаем систему двух уравнений для определения коэффициентов  $v_{12}$  и  $w_{12}$ :

$$1+v_{12}=w_{12}, \quad (k_1/\mu_1) \cdot (1-v_{12})=(k_2/\mu_2) \cdot (1+w_{12}).$$

Из этих уравнений следует, что

$$v_{12} = \frac{k_1 \cdot \mu_2 - k_2 \cdot \mu_1}{k_1 \cdot \mu_2 + k_2 \cdot \mu_1}, \quad w_{12} = \frac{2 \cdot k_1 \cdot \mu_2}{k_1 \cdot \mu_2 + k_2 \cdot \mu_1}. \quad (7.43)$$

В полученном решении (7.42) – (7.43) компоненты  $\check{E}_x', \check{H}_y'$  определяют отражённую электромагнитную волну, а  $\check{E}_x'', \check{H}_y''$  – проходящую волну (иногда также называемую "преломлённой", но, наверное, не в этом частном случае, при угле падения, равном нулю, когда нет "преломления").

## II. Коэффициенты отражения и прохождения

Выражения (7.43) определяют коэффициент отражения  $v_{12}$  и коэффициент прохождения  $w_{12}$  границы  $S_{12}$  (при нормальном падении ЭМ волны на  $S_{12}$ ). Коэффициенты  $v_{12}$  и  $w_{12}$  являются комплексными величинами. Согласно (7.42'), (7.42'') это означает, что (в общем случае) у границы  $S_{12}$  (при  $z=0$ ) компоненты отражённой ( $E_x', H_y'$ ) и проходящей ( $E_x'', H_y''$ ) волн отличаются от соответствующих компонент падающей волны ( $E_x^0, H_y^0$ ) не только по амплитуде, но и по фазе.

В среде, однородной по магнитной проницаемости ( $\mu_1=\mu_2$ ) и, в частности, в немагнитной среде ( $\mu_1=\mu_2=1$ ) из (7.43) получаем:



$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{(\gamma_1 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1)} - \sqrt{(\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)}}{\sqrt{(\gamma_1 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1)} + \sqrt{(\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)}} = \frac{\sqrt{\gamma_1'} - \sqrt{\gamma_2'}}{\sqrt{\gamma_1'} + \sqrt{\gamma_2'}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1'} - \sqrt{\varepsilon_2'}}{\sqrt{\varepsilon_1'} + \sqrt{\varepsilon_2'}}, \\ w_{12} &= \frac{2 \cdot k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{(\gamma_1 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1)}}{\sqrt{(\gamma_1 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1)} + \sqrt{(\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\gamma_1'}}{\sqrt{\gamma_1'} + \sqrt{\gamma_2'}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_1'}}{\sqrt{\varepsilon_1'} + \sqrt{\varepsilon_2'}} \end{aligned} \right\} (7.44)$$

где в соответствии с (6.56)  $\gamma_{1,2}'$  и  $\varepsilon_{1,2}'$  – комплексные удельные электропроводности и комплексные диэлектрические проницаемости в полупространствах  $V_{1,2}$ .

Если среда в области  $V_2$  – идеальный, проводник ( $\gamma_2 = \infty$ ,  $|k_2| = \infty$ ), то согласно (7.43) коэффициент отражения  $v_{12} = -1$ , а коэффициент прохождения  $w_{12} = 0$ .

Если среда в областях  $V_1$  и  $V_2$  – непроводящая (либо в более общем случае  $(\omega \cdot \varepsilon_{a1}/\gamma_1) \gg 1$ ,  $(\omega \cdot \varepsilon_{a2}/\gamma_2) \gg 1$ ), то вместо (7.44) в соответствии с (6.61') получаем

$$v_{12} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad w_{12} = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (7.44')$$

Если в областях  $V_1$  и  $V_2$  выполняются условия квазистационарности:  $(\omega \cdot \varepsilon_{a1}/\gamma_1) \ll 1$ ,  $(\omega \cdot \varepsilon_{a2}/\gamma_2) \ll 1$ , то в соответствии с (6.61'') из (7.44) получаем

$$v_{12} \approx \frac{\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2}}, \quad w_{12} \approx \frac{2 \cdot \sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2}}. \quad (7.44'')$$

Коэффициенты  $v_{12}$  и  $w_{12}$  в (7.44'), (7.44'') – действительные величины, причём  $w_{12} > 0$ , т. е. согласно (7.42'') у границы  $S_{12}$  компоненты  $E_x^0$  и  $E_x''$  или  $H_y^0$  и  $H_y''$  имеют одинаковые фазы. Согласно (7.42') при  $v_{12} > 0$  у границы  $S_{12}$  компоненты  $E_x^0$  и  $E_x'$  – синфазны, а при  $v_{12} < 0$   $E_x^0$  и  $E_x'$  меняются «в противофазе» (см. рис. 7.5). В последнем случае говорят об отражении «с потерей полуволны». Как уже было отмечено, формулы (7.43) – (7.44'') определяют коэффициенты отражения и прохождения для случая нормального падения. При наклонном падении плоской электромагнитной волны на границу  $S_{12}$  соответствующие коэффициенты зависят от угла падения и ориентации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  относительно этой границы (см. [Стрэттон, 1948], с. 432 – 449).

### III. О скин-эффекте и импедансе

Вернёмся к решению, полученному в разделе I, и допустим, что  $\gamma_1 = 0$ , а  $\gamma_2 > 0$ . В соответствии с (6.61') коэффициент затухания  $b_1 = 0$  и поэтому электромагнитное поле распространяется в области  $V_1$  без поглощения.

Выражения (7.42''), определяющие электромагнитное поле в области  $V_2$ , можем представить в виде

$$\check{E}_x^{(2)} = \check{E}_x(0) \cdot \exp(ik_2 z), \quad \check{H}_y^{(2)} = \check{H}_y(0) \cdot \exp(ik_2 z), \quad (7.44''')$$

где  $\check{E}_x(0) = \check{E}_x^0(0) \cdot w_{12}$ ,  $\check{H}_y(0) = \check{E}_x^0(0) \cdot w_{12} \cdot (k_2/\omega \mu_0 \mu_2)$  – значения

(непрерывных на  $S_{12}$ ) компонент  $\check{E}_x$  и  $\check{H}_y$  в плоскости  $z=0$ , т. е. на границе проводящего полупространства.

Фактически этот случай имели в виду, определяя равенствами (6.66)<sub>1</sub>, (6.66')<sub>2</sub> понятие «глубина проникновения».

Выражения (7.44''') для  $\check{E}_x^{(2)}$ ,  $\check{H}_y^{(2)}$  аналогичны выражению (6.63') для поля  $\check{\eta}_0$ . Следовательно, для (действительных) компонент  $E_x^{(2)}$ ,  $H_y^{(2)}$  электромагнитного поля в области  $V_2$  справедливы выражения, аналогичные формулам (6.63), (6.64) – (6.66'') для поля  $\eta$ ). Таким образом, согласно (6.66)<sub>1</sub> амплитуды компонент электромагнитного поля в проводнике экспоненциально затухают с увеличением расстояния  $z$  от поверхности проводника. В соответствии с изложенным в разделе VI, § 6 главы шестой амплитуды компонент  $E_x^{(2)}$  и  $H_y^{(2)}$  уменьшаются в  $e \approx 2.718$  раз на расстоянии  $\delta$  от поверхности проводника. Поэтому величину  $\delta$  называют глубиной проникновения.

Если в области  $V_2$  выполняется условие квазистационарности  $(\omega \cdot \varepsilon_{a2} / \gamma_2) \ll 1$  (см. **рис. 6.14, в, з**), то согласно (6.68') величина  $\delta \approx \sqrt{2 / (\omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma_2 \cdot \mu_2)} = \sqrt{1 / (\pi \cdot \mu_0)} \cdot \sqrt{1 / (f \cdot \gamma_2 \cdot \mu_2)} = \sqrt{1 / (\pi \cdot \mu_0)} \cdot \sqrt{(T \cdot \rho_2) / \mu_2}$ , т. е.  $\delta$  уменьшается с увеличением произведения  $f \cdot \gamma_2 \cdot \mu_2$ . При очень больших значениях  $\gamma_2$  или  $f$  (но соблюдении указанного условия квазистационарности в области  $V_2$ ) электромагнитное поле (и электрический ток) сосредоточено в очень тонком слое проводника у его поверхности. Отсюда – термины «скин-эффект», «скин-слой» (skin – кожа).

Если в однородной области  $V_2$  отношение  $(\omega \cdot \varepsilon_{a2} / \gamma_2) \ll 1$ , то в соответствии с выражениями (6.70'''), (6.71), (7.41'), (7.42) – (7.42'') на границе  $S_{12}$ , при  $z=0$  (и при  $z>0$ ), импеданс

$$Z = \left( \check{E}_{x0}(0) / \check{H}_{y0}(0) \right) \approx \sqrt{(\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_2) / (i \cdot \gamma_2)} = \sqrt{2\pi \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{f \cdot \mu_2 / \gamma_2} \cdot \exp(-i \cdot \pi/4).$$

Если, кроме того, в полупространстве  $V_2$  магнитная проницаемость  $\mu_2 \approx 1$ , то

$$Z \approx \sqrt{2\pi \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{f \cdot \rho_2} \cdot \exp(-i \cdot \pi/4). \quad (7.44''''')$$

В соответствии с (7.44'''''), (7.44''''') импеданс  $Z$  не зависит от (возможно неизвестных) возбудителей ЭМ поля в плоскости  $z=-\infty$ . Согласно (7.44''''') модуль импеданса  $|Z|$  пропорционален  $\sqrt{f \cdot \rho_2} = \sqrt{\rho_2 / T}$ , т. е. зависит от удельного электрического сопротивления  $\rho_2$  проводящего полупространства. Аргумент импеданса  $\arg(Z) = -\pi/4$ . Это означает, что (в рассматриваемой модели) компонента  $E_x$  опережает компоненту  $H_y$  по фазе на  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ).

## § 6. ПЕРЕМЕННЫЙ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ

### I. Постановка задачи. Дополняющие условия

Заданным возбудителем электромагнитного поля является переменный магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$ , определяемым выражением (7.34), см. рис. 7.4, а. На расстоянии  $h$  от диполя есть нормальная к направлению момента  $\mathbf{M}$  плоская граница  $S_{12}$ , разделяющая порознь однородные полупространства  $V_1$  и  $V_2$ . Будем полагать, что граница  $S_{12}$  – горизонтальна, а диполь находится в верхнем полупространстве  $V_1$  на расстоянии  $h$  от границы и его момент  $\mathbf{M}$  при  $t=0$  направлен вертикально вниз. Параметры  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и волновые числа  $k$  в полупространствах  $V_1$  и  $V_2$  будем обозначать соответственно  $\gamma_1, \varepsilon_1, \mu_1, k_1$  и  $\gamma_2, \varepsilon_2, \mu_2, k_2$ . Определим электромагнитное поле, ограничившись случаем немагнитной среды ( $\mu_1=\mu_2=1$ , т. е.  $\mu_{a1}=\mu_{a2}=\mu_0$ ).

Будем пользоваться потенциалом  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$ , связанным с ЭМ полем равенствами (7.14)<sub>1,3</sub>:

$$\overset{\vee}{\mathbf{E}} = \text{rot } \overset{\vee}{\mathbf{A}}^*, \quad \overset{\vee}{\mathbf{H}} = (\gamma - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon) \cdot \left( \overset{\vee}{\mathbf{A}}^* + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \overset{\vee}{\mathbf{A}}^* \right).$$

Введём цилиндрическую систему координат с началом  $O$  в центре магнитного диполя и с осью  $Z$ , направленной вертикально вниз, т. е. по направлению  $\mathbf{M}$  при  $t=0$  (рис. 7.6, а). При этом момент  $\mathbf{M}=\mathbf{1}_z \cdot M_z$ .

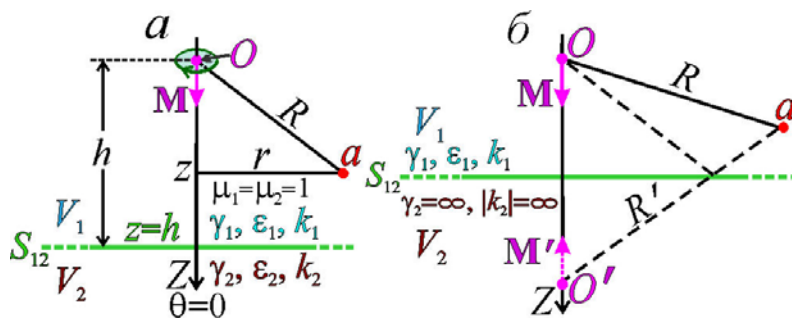


Рис. 7.6.

Вертикальный магнитный диполь над горизонтальной поверхностью раздела (а) и отражение от поверхности идеально проводящей среды (б)

Очевидно, что вследствие симметрии модели среды и заданного возбудителя поля относительно оси  $Z$  поля  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  должны быть также симметричными относительно оси  $Z$  (см. раздел III, § 9 главы первой). Так как ток  $I^{\text{стр}}=I$  имеет нечётную симметрию относительно  $Z$ , то поля

$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}$  – чётно симметричны, а поле  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}$  – нечётно симметрично относительно этой оси. Это означает, что в цилиндрических координатах в общем случае

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^* = \mathbf{1}_r \cdot A_r^*(r, z) + \mathbf{1}_z \cdot A_z^*(r, z), \quad \overset{\vee}{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_r \cdot H_r(r, z) + \mathbf{1}_z \cdot H_z(r, z), \quad \overset{\vee}{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi(r, z). \quad (7.45)$$

Будем искать решение задачи в предположении, что компонента  $A_r^*=0$  и

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^* = \mathbf{1}_z \cdot A_z^*(r, z). \quad (7.45')$$

Искомое решение должно удовлетворять условиям следующей *краевой*

**задачи** (см. § 1). В рассматриваемом случае это – дифференциальные уравнения Гельмгольца для  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  в областях  $V_1, V_2$  и дополняющие условия.

1). При  $r^2+z^2>0$  и  $z\neq h$  (вне особой точки и особой поверхности) вектор  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  должен удовлетворять уравнению (7.14)<sub>4</sub>. То есть

$$\text{в } V_1 \text{ при } r^2+z^2\neq 0 \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} + k_1^2 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} = 0, \text{ а в } V_2 \quad \nabla^2 \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(2)} + k_2^2 \cdot \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(2)} = 0.$$

Решения этих уравнений должны удовлетворять следующим дополняющим условиям.

2). Краевые условия (здесь это – условия в бесконечности). Согласно (7.16)

$$\text{при } (r^2+z^2) \rightarrow \infty \quad \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1,2)} \rightarrow 0 \text{ не медленнее, чем } (r^2+z^2)^{-1/2}.$$

3). Условие в особой точке. В однородной среде потенциал  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  поля переменного магнитного диполя определяет выражение (7.35). Полагая  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $\mu_a = \mu_0$ , из (7.35) получаем:

$$\text{при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0 \quad \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} \rightarrow \infty \text{ как } \mathbf{1}_z \cdot \frac{i\omega\mu_0 \cdot \overset{\vee}{M}_z}{4\pi \cdot \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (7.45'')$$

4). Условиям сопряжения для потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  на границе  $S_{12}$  соответствуют равенства (7.22). Принимая во внимание выражения (7.45), допущение (7.45') и учитывая, что при  $\mu_1 = \mu_2$  в показанной на рис. 7.4, а системе цилиндрических координат

$$dl_1 = dr, dl_2 = r \cdot d\varphi, dl_3 = dz, \overset{\vee}{A}^{*1} = \overset{\vee}{A}^{*r} = 0, \overset{\vee}{A}^{*2} = \overset{\vee}{A}^{*\varphi} = 0, \overset{\vee}{A}^{*3} = \overset{\vee}{A}^{*z},$$

$$\text{div } \overset{\vee}{\mathbf{A}}^* = \partial \overset{\vee}{A}^{*z} / \partial z$$

убеждаемся, что условия (7.22)<sub>2,3</sub> превращаются в тождества, а из условий (7.22)<sub>4</sub>, (7.22)<sub>1</sub> получаем соответственно

$$\text{при } z=h \quad \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(1)}}{\partial r} = \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(2)}}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(1)}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(2)}}{\partial z} \right).$$

Принято во внимание, что в немагнитной среде отношение  $(\gamma'/k^2) = 1/(i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu) = 1/(i \cdot \omega \cdot \mu_0)$ .

Аналогично тому, как было сделано при получении условий (7.20), эти равенства можем заменить более простыми:

$$\text{при } z=h \quad \overset{\vee}{A}^{*z(1)} = \overset{\vee}{A}^{*z(2)}, \quad \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \overset{\vee}{A}^{*z(2)}}{\partial z}. \quad (7.46)$$

## II. Решение задачи

Согласно (7.45), (7.45'), (1.79'), (1.66') уравнение Гельмгольца (7.14)<sub>4</sub> для ненулевой компоненты  $\overset{\vee}{A}^{*z}$  вектора  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  в выбранной системе

цилиндрических координат принимает вид

$$\frac{\partial^2 \overset{\vee}{A^*}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{A^*}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \overset{\vee}{A^*}_z}{\partial z^2} + k^2 \cdot \overset{\vee}{A^*}_z = 0, \quad (7.47)$$

где  $k=k_1, k_2$ ;  $\overset{\vee}{A^*}_z = A^*_{z(1)}$ ,  $\overset{\vee}{A^*}_z = A^*_{z(2)}$  в полупространствах  $V_1, V_2$  соответственно.

Применим метод разделения переменных, в предположении, что  $\overset{\vee}{A^*}_z$  можно представить в виде произведения двух взаимно независимых функций  $\phi(r)$  и  $\psi(z)$ , каждая из которых зависит (только) от одного аргумента. Если  $\overset{\vee}{A^*}_z = \phi(r) \cdot \psi(z)$ , то из (7.47) следует, что

$$\psi \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{\psi}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} + \phi \frac{d^2 \psi}{dz^2} + k^2 \cdot \phi \cdot \psi = 0.$$

Из этого равенства получаем уравнение

$$\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d^2 \psi}{dz^2} + k^2 = -\frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{1}{r \cdot \phi} \cdot \frac{d\phi}{dr}, \quad (7.48)$$

в котором переменные  $r$  и  $z$  разделены. Приравнявая левую и правую части уравнения (7.48) квадрату неотрицательного (имеющего размерность  $1/m$ ) "числа"  $\Lambda \geq 0$  ( $\Lambda^2$  – постоянная разделения), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d^2 \psi}{dz^2} + k^2 = \Lambda^2, \quad \frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r \cdot \phi} \cdot \frac{d\phi}{dr} = -\Lambda^2$$

или

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = (\Lambda^2 - k^2) \cdot \psi, \quad \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} + \Lambda^2 \cdot \phi = 0, \quad (7.48')$$

Решения уравнений (7.48') (линейная комбинация 2-х частных решений):

$$\left. \begin{aligned} \psi(\Lambda, z) &= C'(\Lambda) \cdot \exp(\sqrt{\Lambda^2 - k^2} \cdot z) + C''(\Lambda) \cdot \exp(-\sqrt{\Lambda^2 - k^2} \cdot z), \\ \phi(\Lambda, r) &= D'(\Lambda) \cdot J_0(\Lambda \cdot r) + D''(\Lambda) \cdot Y_0(\Lambda \cdot r), \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

где  $J_0$  и  $Y_0$  – функции Бесселя нулевого порядка первого ( $J$ ) и второго ( $Y$ ) рода аргумента  $(\Lambda \cdot r)$ , а  $C'(\Lambda)$ ,  $C''(\Lambda)$ ,  $D'(\Lambda)$ ,  $D''(\Lambda)$  – множители, не зависящие от координат  $r$  и  $z$  точки наблюдения. Условимся выбирать то из двух значений квадратного корня  $\sqrt{\Lambda^2 - k^2}$  в (7.49)<sub>1</sub> (см. рис. 6.12), при котором действительная часть

$$\operatorname{Re}(\sqrt{\Lambda^2 - k^2}) \geq 0. \quad (7.50)$$

Заметим, что при решении прямых задач для соответствующих (в 1-ом приближении) условиям при геофизических исследованиях скважин 1D-моделей среды с коаксиальными цилиндрическими границами  $r = \text{const}$  (см. рис. 3.1, б) следует поступить иначе. Заменяя (7.48) уравнением

$$\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d^2 \psi}{dz^2} = -\frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{1}{r \cdot \phi} \cdot \frac{d\phi}{dr} - k^2$$

и приравнявая левую и правую части к  $-\Lambda^2$ ,

получаем  $\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d^2\psi}{dz^2} = -\frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{1}{r \cdot \phi} \cdot \frac{d\phi}{dr} - k^2 = -\Lambda^2$ . Следовательно, функции  $\psi$  и  $\phi$

удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка  $\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\Lambda^2 \cdot \psi$ ,  $\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} - (\Lambda^2 - k^2) \cdot \phi = 0$ . В отличие от (7.49)

решениями этих уравнений являются не экспоненты и функции Бесселя, а тригонометрические функции  $\cos(\Lambda \cdot z)$ ,  $\sin(\Lambda \cdot z)$  действительного аргумента  $(\Lambda \cdot z)$  и модифицированные функции Бесселя  $I[(\Lambda^2 - k^2)^{1/2} \cdot r]$ ,  $K[(\Lambda^2 - k^2)^{1/2} \cdot r]$  первого и второго рода комплексного аргумента  $[(\Lambda^2 - k^2)^{1/2} \cdot r]$  (см. [Справочник, 1979, с. 195 – 200]). Функции  $I$  и  $K$  зависят от координаты  $r$  и волнового числа  $k$ . Поэтому при решении прямых задач электродинамики для 1D-моделей среды с границами  $r = \text{const}$  функции  $I[(\Lambda^2 - k^2)^{1/2} \cdot r]$ ,  $K[(\Lambda^2 - k^2)^{1/2} \cdot r]$  позволяют воспользоваться граничными условиями на цилиндрических поверхностях разрыва параметров среды и волновых чисел  $k$ .

Принимая во внимание, что в области  $V_1$  имеем  $-\infty < z < h$ , а в области  $V_2$   $h < z < \infty$ , следует согласно (7.16), (7.50) положить  $C'' = 0$  для области  $V_1$  и  $C' = 0$  для области  $V_2$ . При  $r \rightarrow 0$  функция Бесселя второго рода  $Y_0(\Lambda \cdot r) \rightarrow \infty$  [см.

Справочник, 1979, с. 180 – 191], а величина  $\overset{\vee}{A^*}_z$  должна иметь ограниченные значения при  $r = 0$  и  $z \neq 0$ . Поэтому положим  $D''(\Lambda) = 0$ . Таким образом, получаем согласно (7.49) для полупространств  $V_1$  и  $V_2$  соответственно

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{A^*}_z^{(1)}(\Lambda) &= C'(\Lambda) \cdot \exp(\Lambda_1 \cdot z) \cdot D'_1(\Lambda) \cdot J_0(\Lambda \cdot r), \\ \overset{\vee}{A^*}_z^{(2)}(\Lambda) &= C''(\Lambda) \cdot \exp(-\Lambda_2 \cdot z) \cdot D'_2(\Lambda) \cdot J_0(\Lambda \cdot r), \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

где  $D'_1$  и  $D'_2$  – обозначения множителя  $D'$  для областей  $V_1$  и  $V_2$ , а

$$\Lambda_i = \sqrt{\Lambda^2 - k_i^2} \quad (i=1, 2) \quad (7.51')$$

– величины, удовлетворяющие условию (7.50).

Формулы (7.51) выражают частные решения уравнения (7.47). Суммируя частные решения при всех значениях  $\Lambda \geq 0$ , получаем общие решения:

$$\overset{\vee}{A^*}_z^{(1)} = \int_0^{\infty} \overset{\vee}{A^*}_z^{(1)}(\Lambda) d\Lambda, \quad \overset{\vee}{A^*}_z^{(2)} = \int_0^{\infty} \overset{\vee}{A^*}_z^{(2)}(\Lambda) d\Lambda. \quad (7.51'')$$

Чтобы удовлетворить условию (7.45'') прибавим к правой части (7.51'')<sub>1</sub> решение (7.36) уравнения Гельмгольца (7.14)<sub>4</sub> с подстановками  $\mu_a = \mu_0$ ,  $k = k_1$ . Вводя обозначения

$$C'(\Lambda) \cdot D'_1(\Lambda) = C(\Lambda), \quad C''(\Lambda) \cdot D'_2(\Lambda) = D(\Lambda),$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{A^*}_z^{(1)} &= \frac{i \omega \mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4 \pi R} \cdot \exp(i k_1 R) + \int_0^{\infty} C(\Lambda) \cdot \exp(\Lambda_1 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda, \\ \overset{\vee}{A^*}_z^{(2)} &= \int_0^{\infty} D(\Lambda) \cdot \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda, \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$



где  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Для определения не зависящих от координат  $r, z$  точки  $a$ , но зависящих от  $\Lambda$ , параметров модели среды и стороннего возбудителя ЭМ поля множителей  $C(\Lambda), D(\Lambda)$  надо воспользоваться граничными условиями (7.46)

для  $\overset{\vee}{A}_z^*$  на границе  $S_{12}$ . Но выражение (7.52)<sub>1</sub> для  $\overset{\vee}{A}_z^{*(1)}$  – сумма элементарной функции и несобственного интеграла. Поэтому, если подставим выражения (7.52) в (7.46), получим два интегральных уравнения для определения неизвестных коэффициентов  $C(\Lambda)$  и  $D(\Lambda)$ . Поступим иначе.

Воспользуемся интегралом Зоммерфельда

$$\frac{\exp(ikL)}{L} = \int_0^\infty \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 - k^2}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\Lambda^2 - k^2} \cdot |\xi|\right) \cdot J_0(\Lambda \cdot |\rho|) d\Lambda, \text{ где } L = \sqrt{\rho^2 + \xi^2}. \quad (7.53)$$

Частным случаем (7.53) (при  $k=0$ ) является интеграл Вебера – Липшица:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} = \int_0^\infty \exp(-\Lambda \cdot |\xi|) \cdot J_0(\Lambda \cdot |\rho|) d\Lambda. \quad (7.53')$$

При решении прямых задач для 1D- моделей среды с коаксиальными цилиндрическими границами  $r=\text{const}$  следует вместо (7.53) воспользоваться следующим интегралом:

$$\frac{\exp(ikL)}{L} = \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty K_0\left(\sqrt{\Lambda^2 - k^2} \cdot |\rho|\right) \cdot \cos(\Lambda \cdot \xi) d\Lambda, \quad L = \sqrt{\rho^2 + \xi^2}, \quad \text{Re}\left(\sqrt{\Lambda^2 - k^2} \cdot |\rho|\right) \geq 0,$$

где  $K_0$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка.

Полагая в (7.53)  $L=R, \rho=r, \xi=z$ , можем представить выражение (7.52)<sub>1</sub> в виде

$$\overset{\vee}{A}_z^{*(1)} = \int_0^\infty \left[ \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \cdot \exp(-\Lambda_1 |z|) + C(\Lambda) \cdot \exp(\Lambda_1 z) \right] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda. \quad (7.52')$$

Подставим (7.52'), (7.52)<sub>2</sub> в (7.46) и выполним дифференцирование по  $z$ . Положим  $z=h$  и получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \cdot \exp(-\Lambda_1 h) + C(\Lambda) \cdot \exp(\Lambda_1 h) &= D(\Lambda) \cdot \exp(-\Lambda_2 h), \\ -\frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \Lambda \cdot \exp(-\Lambda_1 h) + \Lambda_1 C(\Lambda) \cdot \exp(\Lambda_1 h) &= -\Lambda_2 D(\Lambda) \cdot \exp(-\Lambda_2 h). \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

Фактически из (7.52'), (7.52)<sub>2</sub>, (7.46) получаем равенства интегралов от умноженных на  $J_0(\Lambda r)$  левых и правых частей (7.54). Но удовлетворение этим равенствам обеспечивают условия (7.54).

Решение системы уравнений (7.54) для  $C(\Lambda)$  и  $D(\Lambda)$ :

$$\left. \begin{aligned}
 C(\Lambda) &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \Lambda_{12} \cdot \exp(-\Lambda_1 \cdot 2h), \\
 D(\Lambda) &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_1} (1 + \Lambda_{12}) \cdot \exp[-(\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot h] = \\
 &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \frac{2\Lambda}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot \exp[-(\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot h], \text{ где } \Lambda_{12} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}.
 \end{aligned} \right\} (7.54')$$

Подставляя (7.54') в (7.52), получаем

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\vee}{A}_z^{*(1)} &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi R} \cdot \exp(ik_1 R) + \\
 &+ \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \Lambda_{12} \cdot \exp[-\Lambda_1 \cdot (2h - z)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda, \\
 \overset{\vee}{A}_z^{*(2)} &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{2\Lambda}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot \exp[-\Lambda_1 h - \Lambda_2 (z - h)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda.
 \end{aligned} \right\} (7.55)$$

Выражения (7.45'), (7.55) удовлетворяют уравнению (7.14)<sub>4</sub> и дополняющим условиям, следовательно, определяют решение рассматриваемой задачи для потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^* = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z^*$ .

Для перехода к полям  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  учтём, что согласно (7.14)<sub>1,3</sub>, (7.45), (7.45'), (1.13'), (1.27'), (1.33')

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\vee}{E}_r &= 0, \quad \overset{\vee}{E}_\varphi = -\frac{\partial \overset{\vee}{A}_z^*}{\partial r}, \quad \overset{\vee}{E}_z = 0, \quad \overset{\vee}{H}_r = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \overset{\vee}{A}_z^*}{\partial r \partial z}, \\
 \overset{\vee}{H}_\varphi &= 0, \quad \overset{\vee}{H}_z = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left( k^2 \cdot \overset{\vee}{A}_z^* + \frac{\partial^2 \overset{\vee}{A}_z^*}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned} \right\} (7.56)$$

Подставляя выражения (7.55) для  $\overset{\vee}{A}_z^*$  в формулы (7.56)<sub>2,4,6</sub> и выполняя дифференцирование с учетом того, что производная  $(\partial J_0(\Lambda \cdot r) / \partial r) = -\Lambda \cdot J_1(\Lambda \cdot r)$  (где  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка), получаем для ненулевых компонент электромагнитного поля в полупространствах  $V_1$  и  $V_2$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\vee}{E}_\varphi^{(1)} &= \frac{i\omega\mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{r}{R^3} (1 - ik_1 R) \cdot \exp(ik_1 R) + \right. \\
 &+ \left. \int_0^\infty \frac{\Lambda^2 \Lambda_{12}}{\Lambda_1} \cdot \exp[-\Lambda_1 \cdot (2h - z)] \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda \right\}, \quad (7.57)_1
 \end{aligned} \right\}$$

$$\check{H}_r^{(1)} = \frac{\check{M}_z}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{r \cdot z}{R^5} (3 - 3ik_1R - k_1^2 R^2) \cdot \exp(ik_1R) - \int_0^\infty \Lambda^2 \Lambda_{12} \cdot \exp[-\Lambda_1 \cdot (2h - z)] \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda \right\}, \quad (7.57)_2$$

$$\check{H}_z^{(1)} = \frac{\check{M}_z}{4\pi} \left\{ \frac{\exp(ik_1R)}{R^3} \left[ (-1 + ik_1R + k_1^2 R^2) + \frac{z^2}{R^2} (3 - 3ik_1R - k_1^2 R^2) \right] + \int_0^\infty \frac{\Lambda^3 \Lambda_{12}}{\Lambda_1} \cdot \exp[-\Lambda_1 \cdot (2h - z)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}, \quad (7.57)_3$$

$$\check{E}_\varphi^{(2)} = \frac{i\omega\mu_0 \check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot \exp[-\Lambda_1 h - \Lambda_2 \cdot (z - h)] \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \quad (7.57)_4$$

$$\check{H}_r^{(2)} = \frac{\check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^2 \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot \exp[-\Lambda_1 h - \Lambda_2 \cdot (z - h)] \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \quad (7.57)_5$$

$$\check{H}_z^{(2)} = \frac{\check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^3}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot \exp[-\Lambda_1 h - \Lambda_2 \cdot (z - h)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda. \quad (7.57)_6$$

Определяемое выражениями (7.57)<sub>1</sub>, (7.57)<sub>4</sub> поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ . Поле  $\mathbf{E}^{\text{Кул}} = 0$  так как ток  $I^{\text{ср}}$  – замкнут и при  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi$  нет нормальной к границе  $S_{12}$  (плоскости  $z=h$ ) компоненты поля  $\mathbf{E}$  (см. (6.56''')<sub>2</sub>). По той же причине и в более общем случае – в осесимметричных прямых задачах электродинамики, в которых кусочно однородные модели среды имеют плоско-параллельные ( $z=\text{const}$ ) и коаксиальные цилиндрические ( $r=\text{const}$ ) границы (рис. 3.1, з), а сторонний возбудитель поля – магнитный диполь с переменным моментом  $\mathbf{M}$ , лежащим на оси симметрии  $Z$  модели среды, поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ЭМИ}}$ .

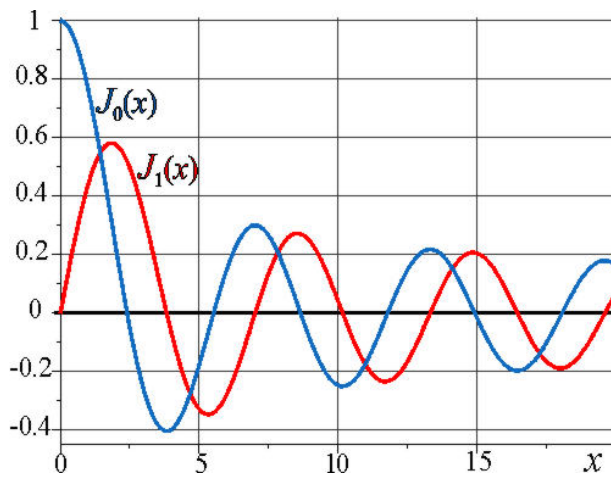
### III. Частные случаи

1. Если точка наблюдения  $a$  расположена на оси  $Z$  ( $r=0$ ), то функции Бесселя  $J_0(\Lambda \cdot r) = J_0(0) = 1$ ,  $J_1(\Lambda \cdot r) = J_1(0) = 0$  (рис. 7.7), следовательно,  $E_\varphi^{(1,2)} = 0$ ,  $H_r^{(1,2)} = 0$ , а в выражениях для компоненты  $H_z^{(1,2)}$  на оси магнитного диполя множитель  $J_0(\Lambda \cdot r) = 1$ .

2. Если переменный магнитный диполь и точка наблюдения расположены на границе  $S_{12}$  ( $h=0, z=0$ ), то в подынтегральных функциях в выражениях (7.57) экспоненты равны единице и для ненулевых компонент ЭМ поля получаем равенства:

$$\left. \begin{aligned} \check{E}_\varphi &= \frac{i\omega\mu_0 \check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \\ \check{H}_r &= \frac{\check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^2 \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \quad \check{H}_z = \frac{\check{M}_z}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\Lambda^3}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda. \end{aligned} \right\} (7.57')$$

Выражения (7.57') для компонент электромагнитного поля – несобственные интегралы в смысле главного значения. Подынтегральные функции в (7.57'), осциллируя при увеличении переменной интегрирования  $\Lambda$ , неограниченно возрастают по амплитуде колебаний при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Во множестве подобных случаев для анализа влияния параметров моделей среды на компоненты ЭМ поля может помочь математическое моделирование.



**Рис. 7.7.**

Графики функций  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ .

Здесь  $x$  – любое неотрицательное действительное (вещественное) число

Очевидно, что такое моделирование при нынешних (и практически "общедоступных") возможностях вычислительной техники не вызывает никаких технических затруднений.

Что же касается численных расчётов на основе (полученных решений прямых задач электродинамики для 1D-моделей среды) несобственных интегралов вида (7.57') и им подобных, то эффективным при этом может быть, к примеру, применение преобразования Эйлера (см., например, [Дашевский, 1982]).

**3.** Как и в предыдущем случае, магнитный диполь и точка наблюдения лежат на границе  $S_{12}$ , т. е.  $h=0, z=0$ . Но, кроме того, верхнем полупространстве  $V_1$  удельная электропроводность  $\gamma_1=0$ , а частота  $\omega$  – достаточно мала для того, чтобы можно было (пренебрегая влиянием токов смещения в верхнем полупространстве) полагать, что в  $V_1$  волновое число  $k_1=0$  и  $\Lambda_1=(\Lambda^2-k_1^2)^{1/2}=\Lambda$ . При этих условиях, после ряда преобразований на основе интегралов (7.53), (7.53') и следствий из (7.53) удастся получить выражения для компонент электромагнитного поля в виде элементарных функций (см. [Заборовский, 1960], с. 110 – 122, [Кауфман, 2020], с. 195 – 207). См. также раздел III § 7 этой главы. Например, из (7.57)<sub>1</sub>, или (7.57)<sub>4</sub> следует, что компоненту  $\check{E}_\varphi$  при  $h=0, z=0, k_1=0$  определяет равенство

$$\check{E}_\varphi = -\frac{i\omega\mu_0 \check{M}_z}{2\pi k_2^2 r^4} \cdot \left[ 3 - (3 - 3ik_2 r - k_2^2 r^2) \cdot \exp(ik_2 r) \right]. \quad (7.57'')$$

Выражения вида (7.57'') можно дополнительно упростить, если точка

наблюдения находится в ближней или дальней зоне.

В ближней зоне ( $|k_2| \cdot r \ll 1$ ) при указанных выше условиях справедливо неравенство  $|H_r| \ll |H_z|$ , поэтому приведём выражения только для компонент  $\check{E}_\varphi$  и  $\check{H}_z$ . Пользуясь степенным рядом (7.31''') для экспоненты  $\exp(i \cdot k_2 \cdot r)$  и пренебрегая слагаемыми, содержащими произведения  $k_2 \cdot r$  выше второго порядка, из (7.57'') получаем:

$$\check{E}_\varphi = \frac{i \omega \mu_0 \check{M}_z}{4 \pi r^2} \cdot \left( 1 + \frac{k_2^2 r^2}{4} \right), \quad \check{H}_z = -\frac{\check{M}_z}{4 \pi r^3} \cdot \left( 1 - \frac{k_2^2 r^2}{4} \right).$$

Если в  $V_2$  электромагнитное поле квазистационарное, т. е.  $(\omega \cdot \varepsilon_{a2} / \gamma_2) \ll 1$  и  $k_2^2 \approx i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma_2$ , то

$$\check{E}_\varphi = \frac{i \omega \mu_0 \check{M}_z}{4 \pi r^2} \cdot \left( 1 + \frac{i \omega \gamma_2 \mu_0 r^2}{4} \right), \quad \check{H}_z = -\frac{\check{M}_z}{4 \pi r^3} \cdot \left( 1 - \frac{i \omega \gamma_2 \mu_0 r^2}{4} \right). \quad (7.57''')$$

Выделим действительные части комплексных величин и представим выражения (7.57''') для компонент  $E_\varphi$  и  $H_z$  в плоскости  $S_{12}$  в виде, аналогичном выражениям (7.39) для безграничной однородной среды:

$$E_\varphi = E_\varphi^0 + E_\varphi^1, \quad H_z = H_z^0 + H_z^1, \quad (7.58)$$

где

$$E_\varphi^0 = \frac{\omega \mu_0 M_0}{4 \pi r^2} \cdot \cos(\omega t - \pi/2), \quad E_\varphi^1 = \frac{\omega^2 \gamma_2 \mu_0^2 M_0}{16 \pi} \cdot \cos(\omega t - \pi); \quad (7.58')$$

$$H_z^0 = -\frac{M_0}{4 \pi r^3} \cdot \cos(\omega t), \quad H_z^1 = \frac{\omega \gamma_2 \mu_0 M_0}{16 \pi r} \cdot \cos(\omega t - \pi/2). \quad (7.58'')$$

Сопоставим формулы (7.58'), (7.58'') с выражениями (7.39'), (7.39'''), предварительно подставив в последние (для экваториальной плоскости диполя и немагнитной среды)  $-H_z$ ,  $\mu_0$ , 1 вместо  $H_\theta$ ,  $\mu_a$ ,  $\sin \theta$  соответственно. Величины  $E_\varphi^0$ ,  $H_z^0$  в (7.58')<sub>1</sub>, (7.58'')<sub>1</sub> совпадают с аналогичными величинами в (7.39')<sub>1</sub>, (7.39''')<sub>1</sub>. Это обусловлено тем, что возбудителями полей  $\mathbf{H}^0$  и  $\mathbf{E}^0$  являются соответственно ток  $I$  магнитного диполя и первичное магнитное поле  $\mathbf{H}^0$ ; поэтому поля  $\mathbf{H}^0$  и  $\mathbf{E}^0$  не зависят от электрических параметров среды.

Величины  $E_\varphi^1$  и  $-H_z^1$  в выражениях (7.58')<sub>2</sub>, (7.58'')<sub>2</sub> в два раза меньше величин  $E_\varphi^1$  и  $H_z^1$ , определяемых формулами (7.39')<sub>2</sub>, (7.39''')<sub>2</sub>. Согласно сказанному в разделе II, § 4 возбудителями поля  $\mathbf{H}^1$  являются вихревые токи, возникающие под действием поля  $\mathbf{E}^0$ , а возбудителем поля  $\mathbf{E}^1$  – поле  $\mathbf{H}^1$ . Поэтому в отсутствии вихревых токов в верхнем полупространстве поле  $\mathbf{H}^1$  и, следовательно, поле  $\mathbf{E}^1$  на плоскости  $S_{12}$  (при  $h=0$  и  $z=0$ ) в два раза меньше, чем в неограниченной однородной проводящей среде.

В дальней зоне имеем:  $|k_2| \cdot r \gg 1$ . Тогда, например, из (7.57'') получаем выражение

$$\check{E}_\varphi = -\frac{i\omega\mu_0\check{M}_z}{2\pi k_2^2 r^4} \cdot \left[ 3 + k_2^2 r^2 \cdot \exp(ik_2 r) \right], \quad (7.58''')$$

в котором согласно (6.59'), (6.59)  $k_2 = a_2 + i \cdot b_2$ , а (в немагнитной среде)  $k_2^2 = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot (\gamma_2 - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2)$ .

Для квазистационарного ЭМ поля, при  $\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \ll \gamma_2$ , в соответствии с (6.61''') имеем:  $k_2^2 = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma_2$  и  $a_2 \approx b_2 \approx |k_2| / \sqrt{2}$ . В этом случае из (7.58''') следует, что

$$\check{E}_\varphi = -\left\{ \frac{3\check{M}_z}{2\pi \cdot \gamma_2} \cdot \frac{1}{r^4} + \frac{i\omega\mu_0\check{M}_z}{2\pi} \cdot \frac{\exp(-b_2 r)}{r^2} \cdot \exp(ia_2 r) \right\},$$

а при  $|k_2| \cdot r \gg 1$  имеем  $b_2 \cdot r \gg 1$  и отношение  $\exp(-b_2 \cdot r) / r^2$  быстрее убывает с увеличением  $r$  по сравнению с  $1/r^4$ . Поэтому можем пренебречь вторым слагаемым в правой части этого выражения.

В книге [Заборовский, 1960] показано, что в рассматриваемом случае ( $h=0, z=0, k_1=0$ ) справедливо неравенство  $|H_z| \ll |H_r|$ , то есть при  $|k_2| \cdot r \gg 1$  можем полагать, что векторы  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_\varphi \cdot E_\varphi$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_r \cdot H_r$  лежат в плоскости  $S_{12}$ . Приведём выражения для компонент  $E_\varphi$  и  $H_r$  при  $\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \ll \gamma_2$  в комплексной форме:

$$\check{E}_\varphi = -\frac{3\check{M}_z}{2\pi r^4} \cdot \frac{1}{\gamma}, \quad \check{H}_r = \frac{3\check{M}_z}{2\sqrt{2}\pi r^4} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{\omega\gamma\mu_0}}. \quad (7.59)$$

Согласно (7.59) амплитуды компонент  $E_\varphi$  и  $H_r$  убывают с увеличением  $r$  как  $(1/r^4)$ . Равный отношению комплексных амплитуд импеданс

$$Z = \left( \frac{\check{E}_{\varphi 0}}{\check{H}_{r 0}} \right) = -\sqrt{(\omega \cdot \mu_0) / \gamma} \cdot \exp(-i \cdot \pi / 4) \quad (7.59')$$

(в немагнитной среде) с точностью до знака, совпадает с выражением (6.71''), определяющим импеданс плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся по направлению оси  $Z$ , для случая квазистационарного поля.

Это различие знаков импеданса  $Z$  в (7.59') и в (6.71''), конечно, обусловлено тем, что орты  $\mathbf{1}_\varphi, \mathbf{1}_r, \mathbf{1}_z$  (в отличие от  $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ ) образуют левовинтовую систему, а "физическим явлениям" это безразлично.

Поэтому можем полагать, что определяемое выражениями (7.59) при  $k_2| \cdot r \gg 1$  поле в пределах небольшого участка плоскости  $S_{12}$  (где  $r \approx \text{const}$ ) представляет собой плоскую электромагнитную волну, *проходящую* в полупространство  $V_2$ .

4. Пусть теперь среда в области  $V_2$  – идеально-проводящая, т. е.  $\gamma_2 \rightarrow \infty$  и, соответственно, при  $\omega > 0$ , имеем  $|k_2| \rightarrow \infty, |\Lambda_2| \rightarrow \infty$ , а точка наблюдения  $a$  расположена в области  $V_1$ . При  $|k_2| \rightarrow \infty$  согласно (7.51'), (7.54')<sub>3</sub> коэффициент  $\Lambda_{12} = -1$  и выражение (7.55)<sub>1</sub> принимает вид



$$\overset{\vee}{A}_z^{*(1)} = \frac{i \omega \mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4 \pi} \cdot \left\{ \frac{\exp(i k_1 R)}{R} - \int_0^\infty \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \exp[-\Lambda_1 \cdot (2h - z)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}, \quad (7.60)$$

где  $\Lambda_1 = \sqrt{\Lambda^2 - k_1^2}$ .

Пользуясь интегралом Зоммерфельда и полагая в (7.53)  $\rho=r$ ,  $\xi=(2 \cdot h-z)$ ,  $k=k_1$ , видим, что интеграл в правой части (7.60) совпадает с интегралом (7.53) и, следовательно, ненулевую компоненту  $\overset{\vee}{A}_z^{*(1)}$  векторного потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)}$  в полупространстве  $V_1$  определяет выражение

$$\overset{\vee}{A}_z^{*(1)} = \frac{i \omega \mu_0 \overset{\vee}{M}_z}{4 \pi R} \cdot \exp(i k_1 R) + \frac{i \omega \mu_0 \overset{\vee}{M}_{z'}}{4 \pi R'} \cdot \exp(i k_1 R'), \quad (7.60')$$

где  $R' = \sqrt{r^2 + (2h - z)^2}$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{M}}' = -\overset{\vee}{\mathbf{M}}$ , то есть в этом случае электродинамический потенциал  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(1)} = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z^{*(1)}$  и, следовательно, ЭМ поле переменного магнитного диполя в верхнем полупространстве  $V_1$  можем выразить в виде суммы двух элементарных функций.

Согласно (7.60') электромагнитное поле в области  $V_1$  – сумма двух "сферических волн". Центром первой из них является точка  $O$ , в которой находится переменный магнитный диполь с моментом  $\overset{\vee}{\mathbf{M}}$ , а второй – точка  $O'$ , симметричная точке  $O$  относительно плоскости  $S_{12}$  (рис. 7.6, б). Второе из этих полей идентично полю переменного магнитного диполя (расположенного в точке  $O'$ ), магнитный момент  $\overset{\vee}{\mathbf{M}}'$  которого отличается от магнитного момента  $\overset{\vee}{\mathbf{M}}$  только противоположным направлением. Таким образом (формально), согласно (7.60') электромагнитное поле в полупространстве  $V_1$  равно сумме ЭМ полей двух переменных магнитных диполей (расположенных в однородной среде с параметрами  $\gamma=\gamma_1$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_1$ ,  $\mu=1$ ): действительного и фиктивного, являющегося зеркальным изображением первого в плоскости  $S_{12}$ .

Фактически же (если допустить, что даже в случае квазистационарного ЭМ поля можно пользоваться представлениями о волнах и их распространении) при указанных выше условиях определяющие ЭМ поле в полупространстве  $V_1$  слагаемые в правой части (7.60') – потенциалы  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^*$  падающей на  $S_{12}$  («прямой») электромагнитной волны и ЭМ волны, отражённой от границы  $S_{12}$  между "умеренно проводящей" средой (либо изолятором) в полупространстве  $V_1$  и идеально проводящей средой в области  $V_2$ .

При  $|\Lambda_2| \rightarrow \infty$  согласно (7.54')<sub>2</sub>, (7.52)<sub>2</sub> в полупространстве  $V_2$   $D(\Lambda)=0$  и  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{*(2)}=0$ . Следовательно, в соответствии с (7.14)<sub>1,3</sub> имеем  $\overset{\vee}{\mathbf{E}}^{(2)}=0$ ,  $\overset{\vee}{\mathbf{H}}^{(2)}=0$ . Заметим, что при  $\gamma_2=\infty$  из (6.68'), (7.44) для глубины проникновения поля и коэффициентов отражения и прохождения получаем:  $\delta=0$ ,  $v_{12}=-1$ ,  $w_{12}=0$ .

## § 7. ПЕРЕМЕННЫЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ

### I. Постановка задачи. Дополняющие условия

Рассмотрим теперь модель, в которой сторонним возбудителем ЭМ поля является гармонически меняющейся (с частотой  $f=\omega/(2\pi)$ ) "горизонтальный" электрический диполь – элемент  $dl$  стороннего электрического линейного тока  $I^{\text{стр}}=I$  (рис. 7.1). Как и в § 3 этой главы будем полагать, что ток  $I=I_0 \cdot \cos(\omega t)$ , а сторонний возбудитель поля определяет произведение  $I \cdot dl$ . В

комплексной форме  $\overset{\vee}{I} \cdot dl = I_0 \cdot dl \cdot \exp(-i \cdot \omega t)$ .

Ограничимся случаем немагнитной среды, полагая  $\mu=1$ ,  $\mu_a=\mu_0$ . Тогда в соответствии с (7.11)<sub>1,3</sub> составляющие ЭМ поля связаны с

электродинамическим потенциалом  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  электрического типа соотношениями

$$\overset{\vee}{\mathbf{H}} = \text{rot } \overset{\vee}{\mathbf{A}}, \quad \overset{\vee}{\mathbf{E}} = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \left( \overset{\vee}{\mathbf{A}} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \overset{\vee}{\mathbf{A}} \right). \quad (7.61)$$

В безграничной однородной среде в сферической и цилиндрической системах координат с началом  $O$  в центре элемента  $dl$  тока  $I$  и осью  $Z$  по направлению  $I$  в момент  $t=0$  векторный потенциал  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  согласно (7.27) определяют выражения

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_z \cdot A_z, \quad A_z = \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi \cdot R} \cdot \exp(i \cdot k R).$$

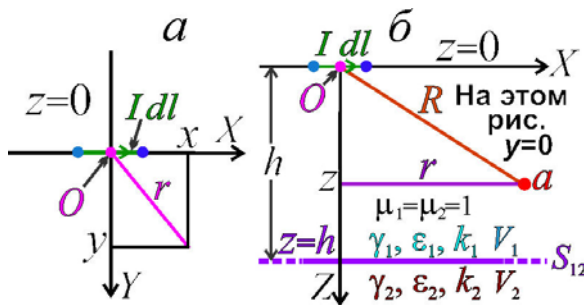
Для случая, когда центр отрезка  $dl$  тока  $I$  расположен в начале  $O$  декартовых координат, ось  $X$  ориентирована по току  $I$  в момент времени  $t=0$ , а волновое число  $k=k_1$  из этого выражения получаем

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_x \cdot A_x, \quad A_x = \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \exp\left(i \cdot k_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad (7.62)$$

где (в немагнитной среде)  $k_1 = [i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot (\gamma_1 - i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1)]^{1/2}$ , а  $\gamma_1 = 1/\rho_1$  и  $\varepsilon_1$  – электрические параметры среды. Если "дополнить" декартовы координаты цилиндрическими с теми же, что в декартовых координатах, началом и осью

$Z$ , то для потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^o$  в безграничной однородной среде с волновым числом  $k_1$  получаем выражение (см. рис. 7.8, а):

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^o = \mathbf{1}_x \cdot A_x^o, \quad A_x^o = \overset{\vee}{Q} \cdot \frac{\exp\left(i \cdot k_1 \sqrt{r^2 + z^2}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \text{где } \overset{\vee}{Q} = \frac{\overset{\vee}{I} \cdot dl}{4\pi}, \quad \text{а } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.63)$$



**Рис. 7.8.**

Переменный электрический диполь в плоскости  $z=0$  (а) и модель среды (б)

Пусть теперь сторонний возбудитель ЭМ поля остался прежним, но в (кусочно – однородной) модели среды, как и в § 6, плоскость  $z=h$  – граница  $S_{12}$  полупространств  $V_1$  и  $V_2$  с параметрами  $\gamma_1=1/\rho_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1=1$ ,  $k_1$  и  $\gamma_2=1/\rho_2$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\mu_2=1$ ,  $k_2$  соответственно. Получим решение соответствующей прямой задачи электродинамики для показанной на рис. 7.8, б модели.

В соответствии с изложенным в § 1, § 2 и разделе I § 6 этой главы решение задачи для потенциала  $\overset{\vee}{A}$ , связанного с ЭМ полем равенствами (7.61), должно удовлетворять условиям следующей **краевой задачи**.

1). Дифференциальные уравнения.

$$\text{В области } V_1 \text{ при } (r^2+z^2) \neq 0 \quad \nabla^2 \overset{\vee}{A}^{(1)} + k_1^2 \cdot \overset{\vee}{A}^{(1)} = 0;$$

$$\text{в области } V_2 \quad \nabla^2 \overset{\vee}{A}^{(2)} + k_2^2 \cdot \overset{\vee}{A}^{(2)} = 0.$$

2). Краевые условия.

$$\text{При } (r^2+z^2) \rightarrow \infty \quad \overset{\vee}{A}^{(1,2)} \rightarrow 0 \text{ не медленнее, чем } (r^2+z^2)^{-1/2}.$$

3). Условие в особой точке (бесконечно малом элементе  $dl$  линейного тока  $I$ ).

$$\text{При } (r^2+z^2) \rightarrow 0 \quad \overset{\vee}{A}^{(1)} \rightarrow \infty \text{ как поле } \overset{\vee}{A}^o \text{ в выражении (7.63).}$$

4). Условия сопряжения на особой поверхности – на границе  $S_{12}$ . Это условия, которым в соответствии с (7.21) должен удовлетворять потенциал  $\overset{\vee}{A}$ , для непрерывности на  $S_{12}$  тангенциальных к  $S_{12}$  компонент векторов **E** и **H**. Для модели на рис. 7.8, б

$$\text{при } z=h \quad E_x^{(2)}=E_x^{(1)}, \quad E_y^{(2)}=E_y^{(1)}, \quad H_x^{(2)}=H_x^{(1)}, \quad H_y^{(2)}=H_y^{(1)}. \quad (7.64)$$

Определить на основе (7.21) требования к потенциалу  $\overset{\vee}{A}$ , обеспечивающие выполнение граничных условий (7.64) для компонент ЭМ поля, будет удобнее в следующем разделе.

## II. Решение задачи

В осесимметричной задаче, рассмотренной в § 6, электромагнитное поле удалось выразить через потенциал  $\overset{\vee}{A}^* = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z^*$ , имеющий лишь одну ненулевую компоненту в цилиндрической (либо декартовой) системе координат. В этом отношении рассматриваемая здесь (не осесимметричная) задача – несколько сложнее.

Попробуем (для определения компоненты  $E_x$  поля **E**) применить при решении этой

прямой задачи ту методику решения подобных задач, о которой можно прочесть в книге [Заборовский, 1960].

Анализ показал, что в общем случае применение такого подхода может привести к неправильным результатам. Следует признать, что приведенное ниже решение является "упрощённым", но оно позволяет проиллюстрировать то, каким образом в частном случае можно перейти от интегралов к элементарным функциям. Как показал опыт, на основе такого подхода можно получить "непротиворечивые" выражения для компоненты поля, коллинеарной оси стороннего возбудителя поля (переменного электрического или переменного магнитного диполя).

Будем искать выражения для связанного с электромагнитным полем

равенствами (7.61) потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}$  электрического типа в виде суммы двух декартовых компонент:

$$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1,2)} = \mathbf{1}_x \cdot \overset{\vee}{A}_x^{(1,2)} + \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{A}_z^{(1,2)}. \quad (7.64')$$

Чтобы удовлетворить некоторым требованиям краевой задачи, в верхнем полупространстве  $V_1$  ( $-\infty < z < h$ ) представим ненулевые компоненты вектора

$\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1)}$  в (7.64') в виде следующих выражений:

$$\overset{\vee}{A}_x^{(1)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \left\{ \frac{\exp(i k_1 R)}{R} + \int_0^\infty B_1 \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \exp(\Lambda_1 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}, \quad (7.65)_1$$

$$\overset{\vee}{A}_z^{(1)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \frac{x}{r} \cdot \int_0^\infty D_1 \exp(\Lambda_1 z) \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda. \quad (7.65)_2$$

В нижнем полупространстве  $V_2$  ( $h < z < +\infty$  и  $(r^2 + z^2) \neq 0$ ) будем искать выражения для ненулевых декартовых компонент потенциала  $\overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(2)}$  в следующем виде:

$$\overset{\vee}{A}_x^{(2)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \int_0^\infty C_2 \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda, \quad (7.66)_1$$

$$\overset{\vee}{A}_z^{(2)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \frac{x}{r} \cdot \int_0^\infty G_2 \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \quad (7.66)_2$$

где, как и в (7.50), (7.51'),

$$\Lambda_i = \sqrt{\Lambda^2 - k_i^2}, \quad \text{Re}(\sqrt{\Lambda^2 - k_i^2}) \geq 0 \quad (i=1, 2), \quad (7.67)$$

$J_0(\Lambda \cdot r)$ ,  $J_1(\Lambda \cdot r)$  функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка (см. рис. 7.7) аргумента  $\Lambda \cdot r$ , а  $B_1 = B_1(\Lambda)$ ,  $D_1 = D_1(\Lambda)$ ,  $C_2 = C_2(\Lambda)$ ,  $G_2 = G_2(\Lambda)$  – подлежащие определению множители, не зависящие от координат  $r$  и  $z$ .

Из (7.21), (7.64) в немагнитной среде ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) при условиях (7.64') получаем систему четырёх уравнений для определения  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $G_2$ :

$$\text{при } z = h: \left\{ \begin{array}{l} \overset{\vee}{A}_x^{(2)} = \overset{\vee}{A}_x^{(1)}, \quad \overset{\vee}{A}_z^{(2)} = \overset{\vee}{A}_z^{(1)}, \quad \frac{\partial \overset{\vee}{A}_x^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \overset{\vee}{A}_x^{(1)}}{\partial z}, \\ \frac{1}{k_2^2} \cdot \left( \frac{\partial \overset{\vee}{A}_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\vee}{A}_z^{(2)}}{\partial z} \right) = \frac{1}{k_1^2} \cdot \left( \frac{\partial \overset{\vee}{A}_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\vee}{A}_z^{(1)}}{\partial z} \right). \end{array} \right. \quad (7.68)$$

В равенстве (7.68)<sub>4</sub> (при  $\overset{\vee}{A}_y = 0$ ) сумма  $(\partial \overset{\vee}{A}_x / \partial x + \partial \overset{\vee}{A}_z / \partial z) = \text{div } \overset{\vee}{\mathbf{A}}$ .

Для нахождения множителей  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $G_2$  на основе (7.68)

воспользуемся интегралом Зоммерфельда (7.53). Как и в § 6, полагая в (7.53)  $|\rho|=r$ ,  $|\xi|=|z|$ , представим (7.65)<sub>1</sub> в виде

$$\overset{\vee}{A}_x^{(1)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{\Lambda}{\Lambda_1} [\exp(-\Lambda_1 |z|) + B_1 \exp(\Lambda_1 z)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}. \quad (7.69)$$

Подставим выражения (7.69), (7.65)<sub>2</sub>, (7.66) в (7.68) и примем во внимание следующее. При  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и некоторой функции  $f(r, \Lambda)$  производная  $\frac{\partial f(r, \Lambda)}{\partial x} = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial f(r, \Lambda)}{\partial r}$ . Если  $f(r, \Lambda)$  – это функции Бесселя  $J_0(\Lambda \cdot r)$  то

$$\text{производная } \frac{\partial J_0(\Lambda \cdot r)}{\partial x} = -\frac{x}{r} \cdot \Lambda \cdot J_1(\Lambda \cdot r). \quad \text{Понятно, что производная}$$

$$\frac{\partial \exp(\pm \Lambda_i \cdot z)}{\partial z} = \pm \Lambda_i \cdot \exp(\pm \Lambda_i \cdot z), \text{ а } \frac{\partial \exp(-\Lambda_1 \cdot |z|)}{\partial z} = -\Lambda_1 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \exp(-\Lambda_1 \cdot |z|).$$

Выполнив дифференцирование и подставив  $z=h$ , получим из (7.68) четыре равенства несобственных интегралов с четырьмя неизвестными. В левых и правых частях всех этих равенств есть множитель  $(x/r)$ , а в подынтегральных функциях – множитель  $J_1(\Lambda \cdot r)$ . Переходя от равенств интегралов к равенствам подынтегральных функций, получаем систему 4-х алгебраических уравнений. Её решение:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \exp(-2\Lambda_1 h), & C_2 &= \frac{2\Lambda}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \exp[(\Lambda_2 - \Lambda_1)h], \\ D_1 &= \frac{2\Lambda^2}{\Lambda_1 k_2^2 + \Lambda_2 k_1^2} \cdot \frac{k_2^2 - k_1^2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \exp(-2\Lambda_1 h), \\ G_2 &= \frac{2\Lambda^2}{\Lambda_1 k_2^2 + \Lambda_2 k_1^2} \cdot \frac{k_2^2 - k_1^2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \exp[(\Lambda_2 - \Lambda_1)h]. \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Теперь можем определить коллинеарную току  $I^{\text{ср}}$  компоненту  $E_x^{(1,2)}$  электрического поля  $\mathbf{E}$  в верхнем и нижнем полупространствах. Согласно (7.61)<sub>2</sub>, (7.64')

$$\overset{\vee}{E}_x^{(1,2)} = i\omega\mu_0 \left( \overset{\vee}{A}_x^{(1,2)} + \frac{1}{k_{1,2}^2} \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}^{(1,2)} \right), \quad (7.71)$$

где в соответствии с (7.69), (7.66), (7.65)<sub>2</sub>

$$\overset{\vee}{A}_x^{(1)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{\Lambda}{\Lambda_1} [\exp(-\Lambda_1 |z|) + B_1 \exp(\Lambda_1 z)] \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\},$$

$$\overset{\vee}{A}_x^{(2)} = \overset{\vee}{Q} \cdot \int_0^\infty C_2 \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda,$$

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(1)} = \check{Q} \cdot \frac{x}{r} \int_0^\infty \left\{ \left[ -\frac{\Lambda^2}{\Lambda_1} \exp(-\Lambda_1 |z|) - B_1 \frac{\Lambda^2}{\Lambda_1} \exp(\Lambda_1 z) + D_1 \Lambda_1 \exp(\Lambda_1 z) \right] \cdot J_1(\Lambda r) \right\} d\Lambda, \quad (7.72)$$

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)} = -\check{Q} \cdot \frac{x}{r} \int_0^\infty [C_2 \Lambda + G_2 \Lambda_2] \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda. \quad (7.73)$$

Определим компоненту  $E_x^{(1,2)}$  в частном случае.

### III. Частный случай

Пусть переменный электрический диполь и точка наблюдения лежат на границе  $S_{12}$ , т. е.  $h=0$ ,  $z=0$  (см. [рис. 7.8](#)); в верхнем полупространстве  $V_1$  удельная электропроводность  $\gamma_1=0$ , а круговая частота  $\omega$  – достаточно мала для того, чтобы можно было (пренебрегая влиянием токов смещения в изоляторе) полагать, что в  $V_1$  волновое число  $k_1=0$  и  $\Lambda_1=(\Lambda^2-k_1^2)^{1/2}=\Lambda$ . Получим при этих условиях выражение для (непрерывной на  $S_{12}$ ) компоненты  $E_x$ . Несколько проще это сделать, пользуясь полученными в разделе II выражениями для полупространства  $V_2$ .

При  $z \geq 0$ ,  $h=0$ ,  $k_1=0$ ,  $\Lambda_1=\Lambda$  из (7.70)<sub>2,4</sub>, (7.66)<sub>1</sub> получаем

$$C_2 = G_2 = \frac{2\Lambda}{\Lambda + \Lambda_2} = \frac{2\Lambda(\Lambda - \Lambda_2)}{\Lambda^2 - \Lambda_2^2} = 2 \frac{\Lambda^2 - \Lambda\Lambda_2}{k_2^2}, \quad (7.74)$$

$$\check{A}_x = \check{Q} \cdot \frac{2}{k_2^2} \left\{ \int_0^\infty \Lambda^2 \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda - \int_0^\infty \Lambda \Lambda_2 \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}. \quad (7.75)$$

Из (7.75) следует, что

$$\text{при } z=0 \quad \check{A}_x = \check{Q} \cdot \frac{2}{k_2^2} \left\{ \int_0^\infty \Lambda^2 J_0(\Lambda r) d\Lambda - \int_0^\infty \Lambda \Lambda_2 J_0(\Lambda r) d\Lambda \right\}. \quad (7.76)$$

Воспользуемся интегралом Зоммерфельда (7.53), согласно которому при  $z \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 - k_2^2}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\Lambda^2 - k_2^2} \cdot z\right) \cdot J_0(\Lambda \cdot r) d\Lambda = \frac{\exp\left(ik_2 \sqrt{r^2 + z^2}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Дважды дифференцируя левую и правую части этого равенства по  $z$ , а затем, полагая  $z=0$ , получаем

$$\int_0^\infty \Lambda \Lambda_2 J_0(\Lambda r) d\Lambda = -\frac{\exp(ik_2 r)}{r^3} (1 - ik_2 r), \quad \text{где } \Lambda_2 = \sqrt{\Lambda^2 - k_2^2}. \quad (7.77)$$

Таким же способом из интеграла Вебера – Липшица (7.53'), либо просто (формально) полагая в (7.77)  $k_2=0$  и, соответственно,  $\Lambda_2=\Lambda$ , не сложно определить, что

$$\int_0^\infty \Lambda^2 J_0(\Lambda r) d\Lambda = -\frac{1}{r^3}. \quad (7.77')$$

Заменим интегралы в правой части (7.76) выражениями в правых частях равенств (7.77), (7.77'). Тогда



$$\text{при } z=0 \quad \check{A}_x = \check{Q} \cdot \frac{2}{k_2^2 r^3} [(1 - ik_2 r) \cdot \exp(ik_2 r) - 1]. \quad (7.78)$$

Определим теперь производную  $\text{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)}$  при  $z \geq 0$ ,  $h=0$ ,  $k_1=0$ ,  $\Lambda_1=\Lambda$ . Согласно (7.73), (7.74) в этом случае

$$\text{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)} = -2\check{Q} \cdot \frac{x}{r} \int_0^\infty \left[ \frac{\Lambda}{\Lambda + \Lambda_2} \Lambda + \frac{\Lambda}{\Lambda + \Lambda_2} \Lambda_2 \right] \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda \quad \text{или}$$

$$\text{div} \check{\mathbf{A}}^{(2)} = -2\check{Q} \cdot \frac{x}{r} \int_0^\infty \Lambda \exp(-\Lambda_2 z) \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda, \quad \text{откуда следует, что}$$

$$\text{при } z=0 \quad \text{div} \check{\mathbf{A}} = -2\check{Q} \cdot \frac{x}{r} \int_0^\infty \Lambda \cdot J_1(\Lambda r) d\Lambda. \quad (7.79)$$

В соответствии с (7.53') если  $\xi=0$ ,  $|\rho|=r$ , то интеграл  $\int_0^\infty J_0(\Lambda \cdot r) d\Lambda = \frac{1}{r}$ .

Приравняем производные  $\partial/\partial r$  левой и правой частей последнего равенства.

Так как  $\partial J_0(\Lambda \cdot r)/\partial r = -\Lambda \cdot J_1(\Lambda \cdot r)$ , то

$$-\int_0^\infty \Lambda \cdot J_1(\Lambda \cdot r) d\Lambda = -\frac{1}{r^2}. \quad \text{Следовательно, согласно (7.79)}$$

$$\text{при } z=0 \quad \text{div} \check{\mathbf{A}} = 2\check{Q} \cdot \frac{x}{r^3} = 2\check{Q} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (7.80)$$

Пользуясь выражениями (7.71), (7.78), (7.80) не сложно определить компоненту  $\check{E}_x$  при расположении переменного электрического диполя и точки наблюдения на плоскости  $S_{12}$ . При  $h=0$ ,  $z=0$ ,  $k_1=0$ , принимая во внимание, что согласно (7.63)<sub>3</sub>  $\check{Q} = \check{I} \cdot dl / 4\pi$ , а отношение  $\frac{i\omega\mu_0}{k_2^2} = \frac{1}{\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2}$ , получаем

$$\check{E}_x = \frac{\check{I} \cdot dl}{2\pi r^3} \cdot \frac{1}{\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \left\{ \frac{2x^2 - y^2}{r^2} + [(1 - ik_2 r) \cdot \exp(ik_2 r) - 1] \right\}. \quad (7.81)$$

В случае, когда в нижнем полупространстве ЭМ поле – квазистационарное, т. е.  $\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \ll \gamma_2$ ,  $1/(\gamma_2 - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2) \approx \gamma_2^{-1} = \rho_2$  (а  $k_2^2 \approx i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma_2 = i \cdot \omega \cdot \mu_0 / \rho_2$ ), из (7.80), (7.81) получаем

$$\check{E}_x = \frac{\rho_2 \cdot \check{I} \cdot dl}{2\pi r^3} \cdot \left\{ \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + [(1 - ik_2 r) \cdot \exp(ik_2 r) - 1] \right\}. \quad (7.81')$$

Из выражений (7.81), (7.81') следует, что  $E_x$  – компонента поля  $\mathbf{E}$ , имеющего кулонову и индукционную составляющие:  $E_x = E_x^{\text{Кул}} + E_x^{\text{ЭМИ}}$ . Согласно (7.81')

$$\overset{\vee}{E}_x^{\text{Кул}} = \frac{\rho_2 \cdot I \cdot dl}{2\pi r^3} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \overset{\vee}{E}_x^{\text{ЭМИ}} = \frac{\rho_2 \cdot I \cdot dl}{2\pi r^3} \cdot [(1 - ik_2 r) \cdot \exp(ik_2 r) - 1]. \quad (7.82)$$

Поле  $\overset{\vee}{E}^{\text{Кул}}$ , компоненту которого определяет выражение (7.82)<sub>1</sub>, создают заряды  $\pm e$  на концах отрезка  $dl$  переменного тока  $I$  (см. (7.30'')). В случае квазистационарного поля в соответствии с (7.31''') заряд  $+e$  меняется в фазе (синфазно) с током  $I$ , но равен не  $\varepsilon_0 \cdot \rho_2 \cdot I$ , а  $2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \rho_2 \cdot I$ . Понятно, что *при заданном стороннем токе  $I^{\text{стр}}=I$  и расположении переменного электрического диполя не в однородной проводящей среде, а на границе  $S_{12}$  проводящего и непроводящего полупространств, заряды  $\pm e$  должны быть в два раза больше по абсолютной величине, чем в неограниченной однородной проводящей среде (см. равенство (7.31'''))*.

В отличие от общего случая, при  $h=0$  в показанной на рис. 7.8, б модели источниками составляющей  $\overset{\vee}{E}^{\text{Кул}}$  поля  $\overset{\vee}{E}$  являются *только* заряды  $\pm e$  на концах элемента  $dl$  стороннего тока  $I=I^{\text{стр}}$  (в точках "обрыва" линейного тока  $I^{\text{стр}}$ ). Отсутствие других источников поля  $\overset{\vee}{E}^{\text{Кул}}$  (индуцированных на границе  $S_{12}$  зарядов) обусловлено тем, что при  $h=0$  нет нормальной к  $S_{12}$  компоненты поля  $\overset{\vee}{E}$  и в соответствии с (6.56''')<sub>2</sub> на  $S_{12}$  поверхностная плотность зарядов  $\sigma=0$ .

Получим из (7.81) выражение для индукционной составляющей  $E_x^{\text{ЭМИ}}$  компоненты  $E_x$  в ближней зоне, т. е. при  $|k_2|r \ll 1$ . Так же, как и ранее в подобных случаях, воспользуемся представлением экспоненты степенным рядом (7.31'''):

$$(1 - ik_2 r) \cdot \exp(ik_2 r) - 1 = (1 - ik_2 r) \cdot [1 + ik_2 r - (k_2^2 r^2 / 2) - (ik_2^3 r^3 / 6) + \dots] - 1 \approx \approx k_2^2 r^2 / 2 + ik_2^3 r^3 / 3.$$

Если пренебречь слагаемыми  $k_2 r$  выше второго порядка, то согласно (7.81), (7.82)<sub>2</sub>

$$\text{при } |k_2|r \ll 1 \text{ и } \mu_2=1 \text{ имеем } \overset{\vee}{E}_x^{\text{ЭМИ}} = \frac{k_2^2}{\gamma_2'} \cdot \frac{I \cdot dl}{4\pi \cdot r} = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot dl}{4\pi \cdot r}. \quad (7.83)$$

Из (7.82)<sub>1</sub>, (7.83), переходя к действительной форме записи, получаем:

$$\overset{\vee}{E}_x^{\text{Кул}} = \frac{\rho_2 \cdot I_0 \cdot dl}{2\pi \cdot r^3} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \cos(\omega t), \quad \overset{\vee}{E}_x^{\text{ЭМИ}} = \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_0 \cdot dl}{4\pi \cdot r} \cdot \cos(\omega t - \pi/2). \quad (7.84)$$

То есть при  $|k_2|r \ll 1$ , как и в однородной среде (см. (7.32'')), составляющая  $E_x^{\text{ЭМИ}}$  поля  $\overset{\vee}{E}$  не зависит от электрических параметров среды. Согласно (7.84)<sub>2</sub> возбуждаемая (при  $|k_2|r \ll 1$ ) первичным магнитным полем элемента  $dl$  переменного тока  $I$  (см. первое слагаемое в правой части (7.32')) компонента  $E_x^{\text{ЭМИ}}$  пропорциональна частоте, опережает по фазе ток  $I=I_0 \cdot \cos(\omega t)$  на  $\pi/2$  и гораздо медленнее убывает по амплитуде с увеличением расстояния  $r$  от переменного электрического диполя до точки наблюдения по сравнению с компонентой  $E_x^{\text{Кул}}$  поля  $\overset{\vee}{E}^{\text{Кул}}$ , создаваемого электрическими зарядами  $\pm e$  в местах обрыва стороннего тока  $I$ .

## Список литературы

1. *Альпин Л. М.* Теория поля. - М.: Недра, 1966.
2. *Альпин Л. М.* Практические работы по теории поля. - М.: Недра, 1971.
3. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. - М.: Недра, 1985.
4. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть I. Введение. Глава первая "Поле", 2019. - 104 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf).
5. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть II. Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020. - 111 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42771398>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf).
6. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть III. Глава четвёртая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020. - 106 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42782333>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf).
7. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. - М.: Наука, 1964.
8. *Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. - Л.: Недра, 1972.
9. *Гурвич И. И., Боганик Г. Н.* Сейсмическая разведка. - М.: Недра, 1980.
10. *Дашевский Ю. А.* Применение преобразования Эйлера для расчета стационарных и гармонических электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах. В кн. Электромагнитные методы геофизических исследований. ИГ и Г СО АН СССР. Новосибирск, 1982.
11. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.
12. *Заборовский А. И.* Переменные электромагнитные поля в электроразведке. - М.: Изд-во МГУ, 1960.
13. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. - М.: Гостехиздат, 1949.
14. *Каринский А. Д., Даев Д. С., Светов Б. С., Талалов А. Д.* Определение диэлектрической проницаемости горных пород по частотным зависимостям удельного электрического сопротивления на основе преобразования Гильберта. // Известия ВУЗ. Геология и разведка. 1997, № 5, с. 101- 109.
15. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебное пособие (Лекции), 2014, 203 с. [Электронный ресурс/Текст]:  
[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2656](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656);

[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lect\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lect_2014.pdf);

<http://www.geokniga.org/books/6822>.

16. *Каринский А. Д.* Электромагнитное поле в моделях электрически анизотропной среды. М.: ГЕОС, 2018, 184 с. [Электронный ресурс/Текст]:

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36951933>;

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=5326](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=5326).

17. *Кауфман А. А.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. - М.: Недра, 1997, 520 с.

18. *Кауфман А. А.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля. - М.: Недра, 2000, 484 с.

19. *Корн Г. и Корн Е.* Справочник по математике /изд. 2-е. - М.: Наука, 1970.

20. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965.

21. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983.

22. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. - М.: Изд-во Иностранная литература, 1958.

23. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1973.

24. *Овчинников И. К.* Теория поля. - М.: Недра, 1979.

25. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. - М.: Недра, 1972.

26. *Светов Б. С.* Теория, методика и интерпретация материалов низкочастотной индуктивной электроразведки. М.: Недра, 1973.

27. *Светов Б. С.* Основы геоэлектрики. - М.: Издательство ЛКИ, 2008.

28. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. - М.: Наука, 1977.

29. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М. Абрамовиц и И. Стиган. Москва, "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1979.

30. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. - М.: Гостехиздат, 1946.

31. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. - М.: Гостехиздат, 1948.

32. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976.

33. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.